Задача 1863*. Рассмотрим последовательность, первые два члена которой равны 1 и 2 соответственно, а каждый следующий член — наименьшее натуральное число, которое ещё не встретилось в последовательности и которое не взаимно просто с предыдущим членом последовательности. Докажите, что каждое натуральное число входит в эту последовательность. (Эту последовательность называют EKG-последовательностью — от слова «электрокардиограмма». Вот первые 25 её членов: 1, 2, 4, 6, 3, 9, 12, 8, 10, 5, 15, 18, 14, 7, 21, 24, 16, 20, 22, 11, 33, 27, 30, 25, 35, 28, 26, 13, 39, 36.)

Решение. Докажем сначала две леммы.

Лемма 1. *Исследуемая последовательность содержит бесконечно много чётных чисел.*

Доказательство. Предположим, что все члены исследуемой последовательности a_1, a_2, a_3 ..., начиная с некоторого, нечётны. Тогда найдётся такое n, что a_n нечётно и при этом больше как всех предыдущих членов последовательности, так и всех чётных её членов.

Обозначим буквой p наименьший простой делитель числа a_n. Тогда $a_{n+1} \geqslant a_n + p$. Более того, поскольку сумма $a_n + p$ чётна, то $a_{n+1} \geqslant$ $\geqslant a_n + 2p > a_n + p$, что противоречит определению числа a_{n+1}.

Лемма 2. *Пусть p — простое число. Если последовательность содержит бесконечно много чисел, кратных p, то она содержит все кратные числа p.*

Доказательство. Пусть число pk не принадлежит последовательности. Почти все (то есть все, начиная с некоторого номера m) члены последовательности больше pk. Рассмотрим такое $n > m$, что a_n делится на p. Число pk претендует на роль a_{n+1}. Противоречие.

Теперь — собственно решение задачи. По лемме 1, последовательность содержит бесконечно много чётных чисел. Следовательно, по лемме 2 она содержит все чётные числа и, значит, для любого простого p последовательность содержит бесконечно много чисел, кратных p, а поэтому в силу леммы 2 она содержит все числа, кратные p.

Замечание. Вычисления подсказывают гипотезу: если a_n — простое число, то $a_n \approx n/2$; если a_n — утроенное простое число, то $a_n \approx 3n/2$; в остальных случаях $a_n \approx n$. Доказаны, однако, лишь неравенства $\frac{1}{14} < \frac{a_n}{n} < 260$.