

**Задача 1821\*.** Для любого натурального  $n$  докажите неравенство

$$\left| \left\{ \frac{n}{1} \right\} - \left\{ \frac{n}{2} \right\} + \left\{ \frac{n}{3} \right\} - \dots + (-1)^n \left\{ \frac{n}{n} \right\} \right| < \sqrt{2n}.$$

**Решение.** Неравенство верно для  $n = 1$  или  $2$ , поэтому пусть  $n \geq 3$ . Рассмотрим число  $k = \lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 1$  и оценим по отдельности величины

$$A = \left\{ \frac{n}{1} \right\} - \left\{ \frac{n}{2} \right\} + \left\{ \frac{n}{3} \right\} - \dots - (-1)^{k-1} \left\{ \frac{n}{k-1} \right\}$$

и

$$B = \left\{ \frac{n}{k} \right\} - \left\{ \frac{n}{k+1} \right\} + \dots + (-1)^{n-k} \left\{ \frac{n}{n} \right\}.$$

Очевидно,

$$A \leq \left\{ \frac{n}{1} \right\} + \left\{ \frac{n}{3} \right\} + \dots,$$

где всего  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  слагаемых, причём первое из них равно  $0$ . Далее,

$$A \geq - \left\{ \frac{n}{2} \right\} - \left\{ \frac{n}{4} \right\} - \dots,$$

где слагаемых  $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$  штук. Поскольку для любого натурального  $m < k$  имеем

$$\left\{ \frac{n}{m} \right\} \leq \frac{m-1}{m} \leq \frac{k-2}{k-1},$$

то

$$|A| \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \cdot \frac{k-2}{k-1} \leq \frac{k-2}{2}.$$

Поскольку дробная часть — это разность самого числа и его целой части, то

$$B = C - D,$$

где

$$C = \frac{n}{k} - \frac{n}{k+1} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{n}{n}$$

и

$$D = \left[ \frac{n}{k} \right] - \left[ \frac{n}{k+1} \right] + \dots + (-1)^{n-k} \left[ \frac{n}{n} \right].$$

Поскольку

$$0 \leq \left( \frac{n}{k} - \frac{n}{k+1} \right) + \left( \frac{n}{k+2} - \frac{n}{k+3} \right) + \dots = C = \frac{n}{k} - \left( \frac{n}{k+1} - \frac{n}{k+2} \right) - \dots \leq \frac{n}{k},$$

то  $0 \leq C \leq \frac{n}{k}$ . Аналогично,  $0 \leq D \leq \left[ \frac{n}{k} \right] \leq \frac{n}{k}$ . Следовательно,

$$|B| = |C - D| \leq \frac{n}{k}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \left| \left\{ \frac{n}{1} \right\} - \left\{ \frac{n}{2} \right\} + \left\{ \frac{n}{3} \right\} - \dots - (-1)^n \left\{ \frac{n}{n} \right\} \right| &= |A - (-1)^k B| \leq \\ &\leq \frac{k-2}{2} + \frac{n}{k} \leq \frac{\sqrt{2n}-1}{2} + \sqrt{\frac{n}{2}} < \sqrt{2n}. \end{aligned}$$