

Задача 1795. На сфере S определена непрерывная функция f . Докажите, что найдётся такое значение, которое функция f принимает на каждой большой окружности сферы S . (Окружность на сфере называют большой, если плоскость, в которой она лежит, проходит через центр сферы.)

Решение. Для каждой большой окружности C сферы S рассмотрим отрезок — область значений ограничения функции f на C . Поскольку всякие две большие окружности сферы пересекаются, то пересечение всяких двух отрезков не пусто. В силу одномерной теоремы Хелли всякое семейство попарно пересекающихся отрезков имеет непустое пересечение.

Осталось обосновать одномерную теорему Хелли. Для любого конечного семейства отрезков достаточно взять точку, которая является самым левым из левых концов попарно пересекающихся отрезков. Эта точка принадлежит всем отрезкам семейства. Для случая бесконечного семейства попарно пересекающихся отрезков достаточно взять точку, которая является точной верхней гранью всех левых концов отрезков семейства; эта точка принадлежит всем отрезкам семейства.