Задача 1775. а) Существует ли квадрат, все вершины и все середины сторон которого лежат на гиперболах $xy = \pm 1$?

б) Существует бесконечно много параллелограммов, одна из вершин каждого из которых — начало координат, две другие лежат на гиперболе $xy = 1$, а четвёртая — на гиперболе $xy = -1$. Докажите это.

в) Площадь каждого такого параллелограмма равна $\sqrt{5}$. Докажите это.

г) Рассмотрим для любого такого параллелограмма $OABC$ порождённую им решётку, то есть множество таких точек M, что $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC}$, где m и n — целые числа. Докажите, что внутренность «креста», ограниченного гиперболами $xy = \pm 1$, не содержит ни одной точки этой решётки, кроме начала координат.

Решение. а) Пусть точка A с координатами $(a; \frac{1}{a})$ — середина стороны искомого квадрата. Тогда $\overrightarrow{AB} = (\frac{1}{a}; -a)$, так что точка B имеет координаты $(a + \frac{1}{a}; \frac{1}{a} - a)$. Условие принадлежности точки B гиперболе $xy = 1$ даёт уравнение

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{a} - a\right) = 1,$$

откуда $\frac{1}{a^2} - a^2 = 1$. Этому уравнению удовлетворяет число $a = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)/2}$. При таком значении a все четыре точки $B(a + \frac{1}{a}; \frac{1}{a} - a)$, $D(-a + \frac{1}{a}; -\frac{1}{a} - a)$, $F(a - \frac{1}{a}; \frac{1}{a} + a)$, $H(-a - \frac{1}{a}; -\frac{1}{a} + a)$ (вершины квадрата) и точки $A(a; \frac{1}{a})$, $C(\frac{1}{a}; -a)$, $E(-a; -\frac{1}{a})$, $G(-\frac{1}{a}; a)$ (середины сторон) лежат на гиперболах $xy = \pm 1$.

б) Рассмотрим точки $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $C = \left(c; -\frac{1}{c}\right)$, а также начало координат $O(0; 0)$. Вершина B параллелограмма $OABC$ имеет координаты $\left(a + c; \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)$. Она лежит на гиперболе $xy = 1$ при условии

$$(a + c) \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) = 1,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{c}{a} - \frac{a}{c} = 1,$$

откуда $\frac{c}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Осталось заметить, что последнему условию удовлетворяют бесконечно много пар чисел a и c.

в) Легко доказать, что площадь S параллелограмма $OABC$, где O — начало координат, $\overrightarrow{OA} = (a; b)$ и $\overrightarrow{OC} = (c; d)$, равна $S = |ad - bc|$. Подставляя $b = 1/a$ и $d = -1/c$, находим

$$S = \left|\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right| = \left|\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 \pm \sqrt{5}}\right| = \sqrt{5},$$

что и требовалось доказать.

г) Для произвольной точки решетки $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC} = \left(ma + nc; \frac{m}{a} - \frac{n}{c}\right) = (x; y)$, где m и n — целые числа, имеем

$$|xy| = \left|(ma + nc)\left(\frac{m}{a} - \frac{n}{c}\right)\right| = \left|m^2 + mn\left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c}\right) - n^2\right| = |m^2 + mn - n^2|.$$

Внутренность «креста» из гипербол $xy = \pm 1$ задаётся неравенствами $|xy| < 1$. Но при целых m и n величина $|m^2 + mn - n^2|$ тоже целая. Единственным целым числом, которое по модулю меньше 1, является нуль. Значит, для лежащей внутри креста точки имеем

$$\left|(ma+nc)\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{c}\right)\right|=0,$$

откуда $ma \pm nc = 0$. Ввиду иррациональности отношения a/c это возможно лишь при $m = n = 0$.

Итак, внутри «креста» из гипербол точек решётки нет. Однако на самих гиперболах таких точек бесконечно много. В самом деле, если $m = \varphi_k$ и $n = \varphi_{k+1}$ — соседние члены последовательности Фибоначчи $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1$, $\varphi_3 = 2$, $\varphi_4 = 3$, $\varphi_5 = 5$, ..., каждый следующий член которой равен сумме двух предыдущих, то

$$|m^2+mn-n^2|=1.$$

Доказать это можно, например, по индукции. Для этого надо, во-первых, проверить базу индукции — равенство

$$|1^2+1\cdot 1-1^2|=1.$$

Во-вторых, надо обосновать индукционный переход, то есть доказать, что если пара $(m;n) = (\varphi_k;\varphi_{k+1})$ удовлетворяет уравнению $|\varphi_k^2+\varphi_k\varphi_{k+1}-\varphi_{k+1}^2| = 1$, то и пара $(\varphi_{k+1};\varphi_{k+2}) = (\varphi_{k+1};\varphi_k+\varphi_{k+1}) = (n;m+n)$ удовлетворяет уравнению

$$\left|\varphi_{k+1}^2+\varphi_{k+1}\varphi_{k+2}-\varphi_{k+2}^2\right|=1.$$

Для этого достаточно раскрыть скобки:

$$|n^2+n(m+n)-(m+n)^2| = |n^2+mn+n^2-m^2-2mn-n^2| =$$
$$= |n^2-mn-m^2| = |-n^2+mn+m^2| = 1.$$