Задача 1721. Существуют ли натуральные числа x и y, удовлетворяющие равенству а) $x^2 - 3y^2 = 2000$; б) $x^2 - 3y^2 = 1000$?

Решение. а) Число x^2 не может делиться на 3, ибо правая часть — число 2000 — не делится на 3. Поскольку $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 \equiv 1 \pmod 3$, то x^2 при делении на 3 даёт остаток 1. Но 2000 даёт остаток 2 — противоречие.

б) Поскольку $(\pm 1)^2 \equiv 1$ и $(\pm 2)^2 \equiv 4 \pmod 5$, то разность $x^2 - 3y^2$ не может делиться на 5, если хотя бы одно из чисел x и y не кратно 5. Значит, из равенства $x^2 - 3y^2 = 1000$ следуют равенства $x = 5a$ и $y = 5b$ для некоторых целых a и b.

Значит, $(5a)^2 - 3(5b)^2 = 1000$, откуда $a^2 - 3b^2 = 40$. Опять числа a и b должны делиться на 5, откуда следует, что $a^2 - 3b^2$ кратно $5^2 = 25$. Но 40 не делится на 25.