Задача 1596. Непрерывная функция f, определённая на отрезке $[0;5]$, удовлетворяет равенству $\int\limits_0^5 f(x)\,dx = 0$. Докажите, что на этом отрезке есть такие числа a и b, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$ и $b - a = 2$ или 3.

Решение. Первый способ. «Согнём» отрезок в окружность длины 5, склеив его концы. На окружности определим естественным образом функцию f, любым образом выбрав её значение в «точке склейки» (например, взяв одно из значений функции в склеившихся в эту точку концах, ведь значение интеграла не меняется при изменении значения функции в одной точке).

Пусть дуга длины 2 скользит вдоль окружности. Тогда интеграл, вычисленный по этой дуге, непрерывно зависит от положения дуги. *Если величина интеграла всё время одного и того же знака (например, положительна), то того же знака величина* $\int\limits_0^5 f(x)\,dx = 0$.

Если же эта величина меняет знак, то, по теореме о промежуточном значении, в какой-то момент она обратится в 0. При этом рассматриваемая дуга может содержать или не содержать «точку склейки». В первом случае перейдём к дополнению — длина дополнения как раз равна 3. Во втором случае и так всё ясно.

Это решение не использует то, что 2 и 3 — целые числа. Следовательно, если на отрезке длины d задана функция, интеграл от которой по всему отрезку равен нулю, то для любого числа a $(0 < a < d)$ на отрезке найдётся отрезочек длины a или $d - a$, интеграл по которому равен нулю.

Есть у этого естественного решения один недостаток: выделенный курсивом факт очевиден для студента, умеющего менять порядок интегрирования в двойном интеграле, но не очевиден для школьника.

Второй способ. Изменим значение функции f в точке $x = 5$, чтобы оно стало равно её значению в точке $x = 0$. Продолжим полученную функцию на всю прямую, считая её периодической с периодом 5. Обозначим $F(t) = \int\limits_0^t f(x)\,dx$. Поскольку

$$F(t+5) - F(t) = \int\limits_t^{t+5} f(x)\,dx = 0,$$

функция F также имеет период 5.

Докажем, что для некоторого t выполнено равенство $F(t)=F(t+2)$. Рассмотрим функцию $g(t)=F(t+2)-F(t)$. Сумма величин $g(8)=F(10)-F(8)$, $g(6)$, $g(4)$, $g(2)$ и $g(0)=F(2)-F(0)$ равна $F(10)-F(0)=0$. Следовательно, эти пять чисел не могут быть все положительны или все отрицательны. Пусть $g(m)$ и $g(n)$ разного знака, $m<n$. По теореме о промежуточном значении, в некоторой точке t отрезка $[m;n]$ функция g равна 0. Если $t\leqslant 3$ или $5<t\leqslant 8$, то

$$\int\limits_t^{t+2} f(x)\,dx=F(t+2)-F(t)=g(t)=0.$$

Если же $3<t\leqslant 5$, то

$$\int\limits_{t-3}^{t} f(x)\,dx=F(t)-F(t-3)=F(t)-F(t+2)=-g(t)=0.$$

Третий способ. Обозначим интегралы функции f по отрезкам $[0;1]$, $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, $[4;5]$ буквами p, q, r, s, t соответственно (заметьте: $p=F(1)-F(0)$, $\ldots$, $t=F(5)-F(4)$). Если среди сумм $p+q+r$, $q+r+s$ и $r+s+t$, являющихся значениями интеграла по отрезкам длины 3, есть числа разного знака, то, по теореме о промежуточном значении, существует отрезок длины 3, интеграл по которому равен нулю. Значит, можно считать, что суммы $p+q+r$, $q+r+s$ и $r+s+t$ положительны.

Тогда $s+t=-(p+q+r)<0$. Опять ссылаясь на теорему о промежуточном значении, видим, что суммы $p+q$, $q+r$, $r+s$, равные интегралам по отрезкам длины 2, можно считать отрицательными.

Из неравенств $p+q+r>0$ и $p+q<0$ следует неравенство $r>0$. Аналогично, из неравенств $q+r+s>0$ и $q+r<0$ следует неравенство $s>0$.

Осталось заметить, что сумма положительных чисел r и s не может быть отрицательной.