Задача 1584. Бесконечная последовательность получается почленным сложением двух геометрических прогрессий. Может ли такая последовательность начинаться с чисел а) 1, 1, 3 и 5; б) 1, 2, 3 и 5; в) 1, 2, 3 и 4; г) 1, 2, 3 и 2?

д) Если первые четыре члена такой последовательности — рациональные числа, то и все другие члены этой последовательности — рациональные числа. Докажите это.

Решение. Если первая прогрессия имеет вид u, ux, ux^2 и ux^3, а вторая — v, vy, vy^2 и vy^3, то из уравнений $a = u + v$, $b = ux + vy$, $c = ux^2 + vy^2$, $d = ux^3 + vy^3$ для нахождения величин $p = x + y$ и $q = xy$ получаем систему уравнений $bp - aq = (ux + vy)(x + y) - (u + v)xy = c$ и $cp - bq = (ux^2 + vy^2)(x + y) - (ux + vy)xy = d$. Решив эту систему линейных относительно p и q уравнений, мы затем должны найти x и y как корни так называемого характеристического уравнения $z^2 - pz + q = 0$. Теперь легко разобраться со всеми пунктами задачи.

а) Может: решив уравнения, получаем последовательность $\frac{2^n}{3} + \frac{(-1)^n}{3}$.

б) Может: это последовательность φ_{n+1}.

в) Не может: характеристическое уравнение $z^2 - 2z + 1 = 0$ имеет кратные корни.

г) Характеристическое уравнение $z^2 - 4z + 5 = 0$ имеет невещественные корни $q = 2 \pm i$. Поэтому если ограничиваться прогрессиями с вещественными членами, ответ отрицательный, а если допустить комплексные — утвердительный.

д) Равенство $(ux^{n+2} + vy^{n+2}) = (ux^{n+1} + vy^{n+1})p - (ux^{n+1} + vy^{n+1})q$ доказывает, что если p и q рациональны, то из рациональности двух соседних членов последовательности следует, что и следующий член тоже является рациональным числом.