Задача 1522. Для любых натуральных чисел d, k и m существует такое натуральное число n, что $(\sqrt{m}+\sqrt{m+d})^k=\sqrt{n}+\sqrt{n+d}$. Докажите это.

Решение. Пусть n нечётно. Возведя число $\sqrt{m+d}+\sqrt{m}$ в n-ю степень и воспользовавшись тем, что $\left(\sqrt{m+d}\right)^2$ и $\left(\sqrt{m}\right)^2$ — натуральные числа, получим равенство
$$\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^n=s\sqrt{m+d}+t\sqrt{m},$$
где s и t — натуральные числа. Заменив $\sqrt{m}$ на $-\sqrt{m}$, получим сопряжённую формулу:
$$\left(\sqrt{m+d}-\sqrt{m}\right)^n=s\sqrt{m+d}-t\sqrt{m}.$$
Перемножим:
$$d^n=(m+d-m)^n=\left(s\sqrt{m+d}+t\sqrt{m}\right)\left(s\sqrt{m+d}-t\sqrt{m}\right)=s^2(m+d)-t^2m.$$
Таким образом, достаточно положить $k=t^2m$ — при этом
$$\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^n=\sqrt{s^2(m+d)}+\sqrt{t^2m}=\sqrt{k+d^n}+\sqrt{k}.$$
Решение для чётных n аналогично:
$$\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^n=s+t\sqrt{m(m+d)},$$
где s, t — натуральные числа. Заменив $\sqrt{m}$ на $-\sqrt{m}$, получим
$$\left(\sqrt{m+d}-\sqrt{m}\right)^n=s-t\sqrt{m(m+d)}.$$
Следовательно,
$$d^n=(m+d-m)^n=\left(s+t\sqrt{m(m+d)}\right)\left(s-t\sqrt{m(m+d)}\right)=s^2-t^2m(m+d).$$
Значит, если $k=t^2m(m+d)$, то
$$\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^n=\sqrt{s^2}+\sqrt{t^2m(m+d)}=\sqrt{k+d^n}+\sqrt{k},$$
что и требовалось.

Можно решить задачу и по-другому. Обозначим $A=\sqrt{m}+\sqrt{m+d}$. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x+d^n}+\sqrt{x}$. Она непрерывна, а её значение в точке $x=0$ меньше числа A^n. Поскольку эта функция стремится к бесконечности при $x\to+\infty$, то существует такое x, что
$$\sqrt{x+d^n}=A^n-\sqrt{x}.$$
Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим после упрощения:
$$\sqrt{x}=\frac{A^{2n}-d^n}{2A^n}=\frac{A^n-\left(\frac{d}{\sqrt{m+d}+\sqrt{m}}\right)^n}{2}=\frac{(\sqrt{m+d}+\sqrt{m})^n-(\sqrt{m+d}-\sqrt{m})^n}{2},$$
откуда уже легко вывести, что x — натуральное число.