Задача 1324. Ни при каком целом a число a^2+a+1 не кратно а) 5; б) 11; в) 17; г) $6m-1$, где m — натуральное число. Докажите это.

Решение. г) Всякое натуральное число вида $6m-1$ имеет хотя бы один простой делитель вида $p=6k-1$. Пусть a^2+a+1 кратно p. Тогда $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$ тоже кратно p. Если $a\equiv 1 \pmod p$, то $a^2+a+1\equiv 1^2+1+1=3$, что невозможно, ибо $p\neq 3$. Значит, порядок числа a по модулю p равен 3, откуда $p-1$ кратно 3. Но $p-1=6k-2$ не кратно 3.

Узнать, что такое порядок числа a по модулю p, можно из книги А.В. Спивака «Арифметика» (выпуск 102 Библиотечки «Квант»).