

Задача 1288*. Число $1\,000\,009 = 235^2 + 972^2$ составное.
а) Докажите это. б) Представьте его в виде произведения двух отличных от 1 натуральных чисел.

Решение. б) Воспользуемся формулой

$$(ac + bd)(ac - bd) = a^2c^2 - b^2d^2 = (a^2 + b^2)c^2 - b^2(c^2 + d^2),$$

взяв $a = 1\,000$, $b = 3$, $c = 235$ и $d = 972$. Поскольку $ac + bd = 237\,916$ и $ac - bd = 232\,084$, то

$$237\,916 \cdot 232\,084 = (ac + bd)(ac - bd) = 1\,000\,009(c^2 - b^2).$$

Применим алгоритм Евклида. Поскольку $1\,000\,009 = 4 \cdot 237\,916 + 48\,345$, имеем $\text{НОД}(1\,000\,009; 237\,916) = \text{НОД}(48\,345; 237\,916)$. Далее, $237\,916 = 5 \cdot 48\,345 - 3809$. Значит,

$$\begin{aligned} \text{НОД}(48\,345; 237\,916) &= \text{НОД}(48\,345; 3809) = \\ &= \text{НОД}(13 \cdot 3809 - 1\,172; 3809) = \text{НОД}(1172; 3809) = \\ &= \text{НОД}(1172; 3 \cdot 1172 + 293) = \text{НОД}(1172; 293) = 293. \end{aligned}$$

(Аналогично можно найти $\text{НОД}(1\,000\,009; 232\,084) = 3413$.)

Ответ: $1\,000\,009 = 293 \cdot 3413$.