Задача 1280*. Период бесконечной десятичной дроби $1/3^{100}$ содержит а) не менее 20 одинаковых цифр подряд; последовательность цифр 123456789; в) любую последовательность из 46 цифр. Докажите это.

Решение. При делении «уголком» 1 на 3^{100} получаем периодическую десятичную дробь с периодом длины $M = 3^{98}$. Поэтому в процессе деления всего встретятся M различных остатков. Первый из остатков равен 1, а каждый следующий получается из предыдущего умножением на $10(= 9 + 1)$ и вычитанием числа, кратного 3^{100}. Эти процедуры не меняют остаток от деления на 9. Поэтому появляющиеся в процессе деления остатки имеют вид $9q + 1$, где $0 \leqslant q < M$. Поскольку чисел такого вида ровно M штук, все они встретятся в качестве остатков.

Остальное просто. Пусть $a = 0{,}a_1a_1\ldots a_{46}$ — десятичная дробь, $b = a + 10^{-46}$. Поскольку $3^{100} > 10^{47}$, разность чисел $3^{100}b$ и $3^{100}a$ больше 10. Следовательно, между ними найдётся число вида $9q + 1$. Поскольку $a < \frac{9q+1}{3^{100}} < b$, в процессе деления, начиная с остатка $9q+1$, будут получены все 46 цифр $a_1a_2\ldots a_{46}$.