Задача 1225. Докажите, что
а)* если для натуральных чисел a и b число $\left(a^2+b^2\right)/(ab-1)$ натуральное, то оно равно 5;
б) уравнение $x^2-5xy+y^2+5=0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

Решение. а) Случай $a=b$ невозможен: число $\frac{2a^2}{a^2-1}=2+\frac{2}{a^2-1}$ не может быть целым ни при каком натуральном a.

Предположим, что при некотором натуральном t уравнение

$$x^2-txy+y^2+t=0 \qquad (*)$$

имеет решения в натуральных числах x, y. Рассмотрим наименьшее натуральное $x=a$, для которого существует натуральное $y=b<a$, удовлетворяющее равенству $(*)$. При фиксированных t и b уравнение $x^2-txb+b^2+t=0$ — квадратное относительно x. Если оно имеет натуральный корень a, то по теореме Виета оно имеет и целый корень $A=tb-a$. Если $A\leqslant 0$, то

$$a^2-tab+b^2+t=a(a-tb)+b^2+t>0,$$

что неверно. Значит, $A\geqslant a$. Если $A=a$, то дискриминант равен нулю:

$$(tb)^2-4(b^2+t)=0,$$

откуда $4t=(t^2-4)b^2\geqslant t^2-4$, так что $t\leqslant 4$; но при $t=1$, 2, 3, 4 равенство $4t=(t^2-4)b^2$ не имеет места.

Итак, $A>a$. По теореме Виета, $aA=b^2+t$ и $a+A=tb$. Поэтому

$$b^2+t-tb=aA-a-A=(a-1)(A-1)-1\geqslant b(b+1)-1=b^2+b-1,$$

откуда

$$t(1-b)\geqslant b-1.$$

Это возможно лишь при $b=1$, причём все неравенства должны обращаться в равенства, то есть $a=2$, $A=3$, $t=5$.

б) Два решения найти легко: $(x;y)=(1;2)$ или $(1;3)$. Из каждого решения $(x;y)$, где $x<y$, можно получить новое решение $(y;5y-x)$. Действительно, $(5y-x)^2-5(5y-x)y+y^2=x^2-5xy+y^2$. При этом $5y-x>4y>y$. Таким образом, любые два соседних члена любой из последовательностей

$$1,\ 2,\ 9,\ 43,\ 206,\ 987,\ \ldots,$$
$$1,\ 3,\ 14,\ 67,\ 321,\ 1538,\ \ldots,$$

где каждый член получается из двух предыдущих x, y по формуле $5y-x$, дают решение интересующего нас уравнения.

На самом деле мы нашли все решения в натуральных числах! Докажем это. Пусть $0<X<Y$ и $X^2-5XY+Y^2+5=0$. Рассмотрим преобразование $(X;Y)\to(x;y)$, где $x=5X-Y$ и $y=X$. Если $x<X$, то $\min(x,y)<\min(X,Y)$, так что удалось получить «меньшее» решение в натуральных числах. Если же $5X-Y\geqslant X$, то $5=(5X-Y)Y-X^2\geqslant XY-X^2=X(Y-X)\geqslant X$. Перебрав значения $X=1$, 2, 3, 4, 5, находим: $(X;Y)=(1;2)$ или $(1;3)$.