Задача 1138*. Для любого натурального n между числами n^2 и $n^2+n+3\sqrt{n}$ найдутся три натуральных числа, произведение двух из которых делится на третье. Докажите это.

Решение. При $n=1$ или 2 утверждение задачи очевидно. Будем для каждого натурального $n>2$ искать нужные числа в виде

$$a=(n-x)(n+x+1)=n^2+n-x^2-x,$$
$$b=(n-x+1)(n+x)=n^2+n-x^2+x,$$
$$c=(n-x+1)(n+x+1)=n^2+2n+1-x^2,$$

где x — наибольшее натуральное число, для которого $x^2+x<n$. Очевидно, $n^2<a<b<c$, и осталось доказать, что $c<n^2+n+3\sqrt{n}$, то есть что $n+1-x^2<3\sqrt{n}$. Предположим, напротив, что $x^2\leqslant n-3\sqrt{n}+1$. Тогда $x<\sqrt{n}-\frac{3}{2}$ (иначе $x^2\geqslant n-3\sqrt{n}+\frac{9}{4}$), и, следовательно, $x+1<\sqrt{n}-\frac{1}{2}$. Но в этом случае $(x+1)^2+(x+1)<(n-\sqrt{n}+\frac{1}{4})+(\sqrt{n}-\frac{1}{2})<n$, что противоречит выбору x.