Задача 1086. С числом разрешено проводить две операции: «увеличить в 2 раза» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить число а) 100? б) 9907? в) n, если в двоичной системе счисления n имеет вид $\overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0}$?

Решение. в) Задачу удобно решать с конца, то есть искать кратчайший способ получения нуля из произвольного числа n с помощью двух операций — вычитания единицы и деления пополам. Пусть $f(n)$ — число операций в таком кратчайшем способе.

Если $n = 2k+1$ — нечётное число, то делить его пополам нельзя, так что $f(2k+1) = 1 + f(2k)$. Докажем индукцией по k, что $f(2k) = 1 + f(k)$. Для $k = 1$ это ясно. Пусть утверждение доказано для всех $k < K$. Если из числа $2K$ сначала вычесть единицу, то для получения нуля потребуется как минимум $1 + f(2K-1) = 2 + f(2K-2) = 3 + f(K-1)$ операций. Если же сначала разделить $2K$ пополам, то потребуется лишь $1 + f(K) \leqslant 2 + f(K-1)$ операций.

Теперь индукцией по m легко доказать, что $f(n) = m + a_m + a_{m-1} + \ldots + a_1 + a_0$.

В частности, $f(100) = f(110\,0100_2) = 6+1+1+0+0+1+0+0 = 9$ и $f(9907) = f(10\,0110\,1011\,0011_2) = 13 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 21$.