

Задача 1053. Для любого $m > 3$ последовательность Фибоначчи содержит не менее четырёх и не более пяти m -значных чисел. Докажите это.

Указание. Пользуясь разложением частного двух последовательных чисел Фибоначчи в цепную дробь, докажите, что при $n \geq 3$ частное от деления φ_{n+1} на φ_n не меньше 1,5 и не больше 1,7. Затем воспользуйтесь следующими оценками: $\varphi_{n+5} = \varphi_{n+4} + \varphi_{n+3} = 2\varphi_{n+3} + \varphi_{n+2} = 3\varphi_{n+2} + 2\varphi_{n+1} = 5\varphi_{n+1} + 3\varphi_n \geq 5 \cdot 1,5\varphi_n + 3\varphi_n > 10\varphi_n$ и $\varphi_{n+3} = \varphi_{n+2} + \varphi_{n+1} = 2\varphi_{n+1} + \varphi_n = 3\varphi_n + 2\varphi_{n-1} \leq 3 \cdot 1,7\varphi_{n-1} + 2\varphi_{n-1} < 10\varphi_{n-1}$.