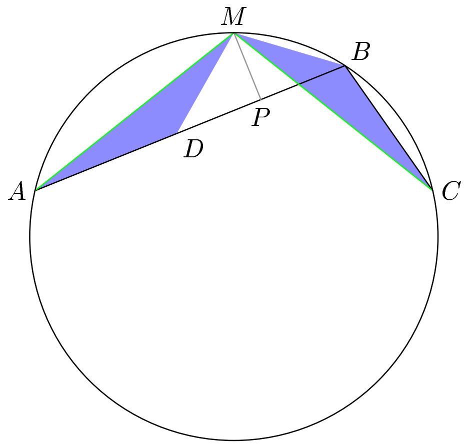
Задача 1000. Если треугольник ABC вписан в окружность, причём $AB > BC$ и M — середина дуги AC, расположенной с той же стороны от прямой AC, что и точка B, то основание P перпендикуляра, опущенного на отрезок AB из точки M, делит ломаную ABC пополам: $AP = PB + BC$.



Решение. Первый способ. В силу теоремы о вписанном угле величины углов BAM и BCM, опирающихся на одну и ту же дугу BM, равны. Поэтому при повороте треугольника MBC вокруг точки M, при котором точка C переходит в точку A, треугольник MBC переходит в некоторый треугольник MDA, где точка D лежит на отрезке AB. При этом $MD = MB$. Поскольку высота равнобедренного треугольника является и его медианой, то $DP = PB$, откуда $AP = AD + DP = PB + BC$, что и требовалось доказать.

Второй способ — тригонометрический — не требует фантазии: обозначим $\angle BAC = \alpha$ и $\angle BCA = \gamma$. Тогда $AB = 2R\sin\gamma$ и $BC = 2R\sin\alpha$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABM. Поэтому

$$AB + BC = 2R(\sin\gamma + \sin\alpha) = 4R\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}.$$

С другой стороны, $\angle MAC = (\alpha+\gamma)/2$ и $\angle MAB = (\gamma-\alpha)/2$. Следовательно, $AM = 2R\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$ и

$$AP = AM\cos\angle MAB = 2R\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{1}{2}(AM + MB).$$