Задача 981. Число $\underbrace{11\ldots1}_{1986\text{ единиц}}$ имеет по крайней мере а) 8; б) 128; в*) 1024 различных делителей. Докажите это.

Решение. а) Поскольку $1986 = 2\cdot3\cdot331$, число $A = \underbrace{11\ldots1}_{1986}$ имеет кроме числа 1 и самого A ещё шесть делителей из одних единиц: 11, 111, 111 111, $\underbrace{11\ldots1}_{331}$, $\underbrace{11\ldots1}_{662}$ и $\underbrace{11\ldots1}_{993}$.

б) Поскольку $111\,111 = 111\cdot1001 = 3\cdot37\cdot7\cdot11\cdot13$ и поскольку число $10^{993}+1$ кратно числу $10^3+1 = 1001$, а число $10^{993}-1$ кратно числу $10^3-1 = 999$, то, обозначив $a = 10^{331}$, получаем: $A = (a^6 - 1)/9 = (a^3+1)(a^3-1)/9 = 3\cdot37\cdot7\cdot11\cdot13\cdot\frac{a^3+1}{1001}\cdot\frac{a^3-1}{999}$. Произведение любого набора из этих семи множителей является делителем числа A («пустому набору» соответствует 1). Таким образом, мы нашли $2^7 = 128$ делителей. Все они различны, поскольку семь выписанных множителей попарно взаимно просты. (В самом деле, остаток от деления числа a на $m = 10^6-1$ равен 10, поскольку $10^{331}-10 = 10\left(10^{6\cdot55}-1\right)$ кратно m; поэтому $a^3\pm1$ при делении на m даёт остаток $10^3\pm1$, так что числа $(a^3+1)/1001$ и $(a^3-1)/999$ взаимно просты с m и, очевидно, взаимно просты друг с другом.)

в) Продолжим разложение: $A = 3\cdot37\cdot7\cdot11\cdot13\cdot\frac{a+1}{11}\cdot\frac{a^2-a+1}{91}\cdot\frac{a-1}{9}\cdot\frac{a^2+a+1}{111}$. Значит, A имеет не менее $2^9 = 512$ делителей. В силу малой теоремы Ферма число $9A = 10^{1986}-1$ кратно простому числу 1987. Таким образом, один из четырёх последних сомножителй разложения кратен 1987, а значит, A имеет не менее $2^{10} = 1024$ делителей.