Задача 960. Если квадрат некоторого натурального числа n представи́м в виде разности кубов последовательных целых чисел, то число n есть сумма квадратов двух последовательных целых чисел.
а) Докажите это утверждение.
б) Вот пример таких чисел: $8^3 - 7^3 = (2^2 + 3^2)^2$; приведите ещё хотя бы один пример.
в) Докажите, что таких примеров бесконечно много.

Решение. Равенство $n^2 = (x+1)^3 - x^3$ равносильно равенству $(2n-1)(2n+1) = 3(2x+1)^2$.

Числа $2n-1$ и $2n+1$ взаимно просты, так что одно из них должно быть квадратом, а другое — утроенным квадратом. Значит, существуют такие натуральные числа s и t, что верны равенства $2n-1 = 3t^2$ и $2n+1 = s^2$ или равенства $2n-1 = t^2$ и $2n+1 = 3s^2$. В первом случае $s^2 - 3t^2 = 2$, что невозможно, поскольку квадрат целого числа не может давать остаток 2 при делении на 3. Значит, имеет место второй случай: $2n-1 = t^2$. Обозначив $t = 2k+1$, из равенства $2n-1 = (2k+1)^2$ получаем $n = 2k^2+2k+1 = k^2+(k+1)^2$.

б) и в) Домножим обе части уравнения $3x^2 + 3x + 1 = y^2$ на 4 и выделим полный квадрат: $3(4x^2 + 4x + 1) + 1 = (2y)^2$, то есть $(2y)^2 - 3(2x+1)^2 = 1$. Обозначив $z = 2y$ и $t = 2x+1$, получаем уравнение Пелля $z^2 - 3t^2 = 1$. Нас интересуют не все решения последнего уравнения, а лишь те, где z чётно. В любом решении уравнения $z^2 - 3t^2 = 1$ одно из чисел z и t чётно, а другое нечётно. При переходе $(z;t) \to (2z+3t; z+2t)$ пара (чётное; нечётное) преобразуется в (нечётное; чётное), и наоборот. Поэтому нужно рассматривать только «половину» решений, а именно $(z;t) = (26;15)$, $(362;209)$, $(5042;2911)$, $(70226;40545)$, $(978122;564719)$, $(13623482;7865521)$ и так далее. Этим решениям соответствуют пары $(x;y) = (7;13)$, $(104;181)$, $(1455;2521)$, $(20272;35113)$, $(282359;489061)$, $(3932760;6811741)$, … В частности, $8^3 - 7^3 = 13^2$ и $3932761^3 - 3932760^3 = 6811741^2$. Согласитесь, последняя формула впечатляет!