Задача 934*. В пространстве расположено $2n$ $(n \geqslant 2)$ точек так, что никакие четыре точки не лежат в одной плоскости, и проведено n^2+1 отрезков с концами в этих точках. Докажите, что проведённые отрезки образуют не менее n треугольников.

Решение. При $n = 2$ утверждение легко проверить непосредственно. Применим индукцию: докажем утверждение для $2n+2$ точек, считая его верным для $2n$ точек. Согласно теореме Турана, проведённые отрезки образуют хотя бы один треугольник ABC. Обозначим количества отрезков, выходящих из вершин треугольника ABC (не считая его сторон), через k_A, k_B и k_C соответственно.

Если $k_A + k_B + k_C < 3n - 1$, то среди точек A, B, C найдутся такие две точки, пусть для определённости это A и B, что $k_A + k_B \leqslant \leqslant 2n - 2$. Выбросим эти точки и все выходящие из них отрезки (вместе с отрезками AC и BC). Мы получим набор из $2n$ точек, соединённых не менее чем $(n+1)^2+1-(2n-2) = n^2+1$ отрезками. По предположению индукции, есть не менее n треугольников, да ещё не надо забывать треугольник ABC.

Если же $k_A + k_B + k_C \geqslant 3n - 1$, то обозначим через N_m, где $m = 0$, 1, 2 или 3, количество таких точек, которые соединены ровно с m вершинами треугольника ABC. Тогда

$$N_1 + N_2 + N_3 \leqslant N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = 2n - 1$$

и

$$N_1 + 2N_2 + 3N_3 = k_A + k_B + k_C \geqslant 3n - 1,$$

следовательно, $N_2 + 3N_3 \geqslant N_2 + 2N_3 = N_1 + 2N_2 + 3N_3 - (N_1 + N_2 + + N_3) \geqslant 3n - 1 - (2n - 1) = n$. Значит, треугольник ABC вместе с $N_2 + 3N_3$ треугольниками, имеющими с треугольником ABC общую сторону, даёт искомые не менее чем $n+1$ треугольников.