Задача 874. Пусть m и n — натуральные числа. Докажите, что а) $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m \neq \left(3+5\sqrt{2}\right)^n$; б)* $\left(a+b\sqrt{d}\right)^m \neq \neq \left(b+a\sqrt{d}\right)^n$, где a, b и d — натуральные числа, $a \neq b$ и число d не является точным квадратом.

Решение. а) Пусть $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m = \left(3+5\sqrt{2}\right)^n$. Переход к сопряжённым числам даёт равенство $\left(5-3\sqrt{2}\right)^m = = \left(3-5\sqrt{2}\right)^n$, которое противоречит неравенствам $0 < 5 - - 3\sqrt{2} < 1$ и $5\sqrt{2}-3 > 1$.

Второй способ. Если $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m = \left(3+5\sqrt{2}\right)^n$, то и $\left(5-3\sqrt{2}\right)^m = \left(3-5\sqrt{2}\right)^n$. Перемножая эти равенства, получаем: $(25-9\cdot 2)^m = (9-25\cdot 2)^n$, то есть $7^m = (-41)^n$, что невозможно.

б) Пусть для определённости $a < b$. Тогда $1 < b+a\sqrt{d} < < a+b\sqrt{d}$ и поэтому $m < n$. Переходя к сопряжённым числам и деля почленно полученное при этом равенство на исходное, получаем:

$$\left|\frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}}\right|^m = \left|\frac{b-a\sqrt{d}}{b+a\sqrt{d}}\right|^n .$$

Сравним величины $\mu = \left|\frac{b\sqrt{d}-a}{a+b\sqrt{d}}\right|$ и $\nu = \left|\frac{a\sqrt{d}-b}{b+a\sqrt{d}}\right|$. Для этого достаточно сравнить числа

$$\left|\left(b\sqrt{d}-a\right)\left(b+a\sqrt{d}\right)\right| \text{ и } \left|\left(a\sqrt{d}-b\right)\left(a+b\sqrt{d}\right)\right|.$$

Первое из них равно $\left|ab(d-1)+(b^2-a^2)\sqrt{d}\right|$, а второе равно $\left|ab(d-1)-(b^2-a^2)\sqrt{d}\right|$. Обозначая $S = ab(d-1)$ и $T = (b^2-a^2)\sqrt{d}$, сводим дело к сравнению чисел $|S+T|$ и $|S-T|$. Поскольку S и T — положительные числа, то $|S+T| > |S-T|$. Значит, $\mu > \nu$. Тем более, $\mu^m > \nu^m > \nu^n$. Но, как вы помните, $\mu^m = \nu^n$.