Задачи М814* и М1556. Отметим в натуральном ряду числа, которые можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Среди отмеченных чисел встречаются тройки последовательных чисел, например, $72 = 6^2 + 6^2$, $73 = 8^2 + 3^2$, $74 = 7^2 + 5^2$. Докажите следующие утверждения.

а) Не существуют четыре последовательных отмеченных числа.

б) Существует бесконечно много троек отмеченных последовательных чисел.

в) Существует бесконечно много таких отмеченных чисел n, что ни число $n-1$, ни $n+1$ не является отмеченным.

г) Существует бесконечно много таких пар отмеченных чисел n и $n+1$, что ни число $n-1$, ни $n+2$ не является отмеченным.

д) Существуют сколь угодно длинные отрезки натурального ряда, состоящие сплошь из неотмеченных чисел.

Решение. б) *Первый способ (указание).* Если числа $n-1$, n и $n+1$ отмеченные, причём число $n = a^2 + b^2$ нечётное, то таковы же и числа $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$, $n^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$ и $n^2 + 1^2$.

Второй способ. Рассмотрим тройку чисел $289n^2 - 1 = (17n-1)^2 + (34n-2)$, $289n^2 = (15n)^2 + (8n)^2$ и $289n^2 + 1 = (17n)^2 + 1^2$. Доказать, что для бесконечно многих натуральных n число $34n - 2$ является квадратом натурального числа, легко: $(34k+10)^2 = 34(34k^2+20k+3)-2$.

Третий способ. Рассмотрим тройки последовательных чисел $2n^2 = n^2 + n^2$, $2n^2 + 1$ и $2n^2 + 2 = (n-1)^2 + (n+1)^2$. Чтобы число $2n^2 + 1$ было суммой двух квадратов, достаточно, чтобы для некоторого натурального числа k

выполнялось равенство

$$2n^2 + 1 = (n - k)^2 + (n + k - 1)^2,$$

которое равносильно равенству $n = k^2 + k$.

в) *Первый способ.* Остаток от деления квадрата на 16 может равняться 0, 1, 4 или 9. Поэтому остаток от деления суммы двух квадратов на 16 может равняться 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 и 13. В этом списке отсутствуют соседи числа 13. Следовательно, соседи числа $(8a + 5)^2 + (8a + 6)^2$, где a и b — целые числа, не представимы в виде суммы двух квадратов.

Второй способ. $2 \cdot 100^m = (10^m)^2 + (10^m)^2$. Число $2 \cdot 100^m - 1$ даёт остаток 3 при делении на 4, а число $2 \cdot 100^m + 1$ даёт остаток 3 при делении на 9.

Третий способ. $(3^m)^2 + 1^2$ — сумма двух квадратов. Число 9^m невозможно разложить в сумму квадратов двух натуральных чисел. Невозможно представить в виде суммы двух квадратов и число $9^m + 2$, ибо оно сравнимо с 3 по модулю 4.

г) Рассмотрите $n = 100^m$.

д) Воспользуйтесь китайской теоремой об остатках и бесконечностью множества простых чисел, дающих остаток 3 при делении на 4.