

**Задача 726.** Точку внутри правильного  $2n$ -угольника соединили с вершинами. Возникшие  $2n$  треугольников раскрасили попеременно в голубой и красный цвет. Докажите, что сумма площадей голубых треугольников равна сумме площадей красных для а)  $n = 4$ ; б)  $n = 3$ ; в) любого натурального  $n > 1$ .

*Указание.* Разберите отдельно случаи чётного и нечётного  $n$ .

**Решение.** Поскольку в правильном многоугольнике все стороны равны, достаточно доказать, что сумма высот красных треугольников равна сумме высот голубых.

Если  $n$  чётно, то к противоположным сторонам  $2n$ -угольника примыкают треугольники одного цвета, поэтому сумма длин высот таких треугольников равна расстоянию между этими сторонами. Разбивая треугольники на пары, прилегающие к противоположным сторонам, получим утверждение задачи.

При нечётном  $n$ , продолжив «красные» стороны  $2n$ -угольника, получим правильный  $n$ -угольник. Построенный таким же образом голубой  $n$ -угольник конгруэнтен красному. Площадь голубого  $n$ -угольника равна сумме длин высот голубых треугольников, умноженной на половину длины его стороны. То же верно и для красного  $n$ -угольника. Отсюда следует равенство сумм длин высот голубых и красных треугольников, а вместе с этим и утверждение задачи.