Задача 693. Ежедневно каждый из 1000 жителей посёлка делится узнанными накануне новостями со всеми своими знакомыми. Любая новость рано или поздно становится известной всем жителям посёлка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно им сообщить какую-то новость, то через 10 дней её будут знать все жители посёлка.

Решение. Каждый житель посёлка — вершина графа. Знакомство между жителями — ребро этого графа. Условие «любая новость рано или поздно становится известной всем жителям посёлка» означает, что граф связный. Последовательность вершин, в которой всякие две соседние вершины соединены ребром, а никакое ребро не присутствует дважды, называют цепью. Цепь, которая заканчивается в той же вершине, где она началась, называют замкнутой цепью или циклом. Связный граф, в котором нет циклов, называют деревом.

Если связный граф не является деревом, то можно разорвать одно из его рёбер, входящих в цикл, не нарушая связность графа. Таким образом, разорвав при необходимости часть рёбер, можно от любого связного графа перейти к его остовному дереву. (Остовное дерево определено неоднозначно, однако какое именно остовное дерево будем рассматривать, несущественно.)

Итак, рассмотрим 1000-вершинное дерево. Из условия следует, что любые два жителя соединены некоторой цепью. Рассмотрим самую длинную цепь $X — A_1 — A_2 — \ldots — A_k — Y$. Если $k \leqslant 19$, то новость, сообщённая A_{10}, через 10 дней станет известна всем жителям посёлка. Если $k \geqslant 20$, отделим жителей X, A_1, ..., A_{10} и всех, кто связан с ними не через A_{11} (их не меньше 11). Оставшаяся группа жителей по-прежнему образует дерево.

Повторяя уже описанную процедуру 89 раз (на каждом шагу выделяя своего A_{10}), мы либо на каком-то шагу исчерпаем всех жителей, либо останется не более $1000 - 89 \cdot 11 = 21$, из которых выберем ещё одного, как описано выше.

Указание. То, что в связном графе с 1000 вершинами не всегда можно выделить 89 вершин так, чтобы любая вершина графа была удалена от одной из них не более чем на 10, следует из того, что этого нельзя сделать уже для дерева с 991 вершиной, устроенного так: из корня исходят 90 отрезков, на каждом из которых находятся ещё 10 вершин.