Задача 618*. Докажите следующие утверждения.

а) Существует бесконечно много таких натуральных n, что $n!$ делится на n^2+1.

б) Для любого числа $\alpha > 0$ существует бесконечно много таких натуральных n, что $[\alpha n]!$ делится на n^2+1.

Решение. а) При помоши рузультатов статьи В.А. Сендерова и А.В. Спивака «Уравнения Пелля» («Квант» №3 и 4 за 2002 год) нетрудно доказать, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел m и n, для которых $n^2+1=5m^2$ и $m>5$. При этом $m=\sqrt{(n^2+1)/5}<n/2$ и $n!$ делится на n^2+1, так как при $m>5$ в произведении $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$ есть множители 5, m и $2m$.

б) В силу равенства $n^2-(n^2+1)\cdot 1=-1$ и свойств уравнений Пелля существуют сколь угодно большие натуральные числа d, для которых уравнение $x^2-dy^2=-1$ имеет хотя бы одно решение в натуральных числах — а следовательно, и бесконечно много.

Есть и другие способы доказательства. Например, можно воспользоваться разложением многочлена $x^{105}+1$ на неприводимые многочлены с целыми коэффициентами (подробности — в статье В.А. Сендерова и А.В. Спивака «Многочлены деления круга», «Квант» №1 за 1998 год) или разложением $64m^{12}+1=(4m^4+1)(4m^4-4m^3+2m^2-2m+1)(4m^4+4m^3+2m^2+2m+1)$.