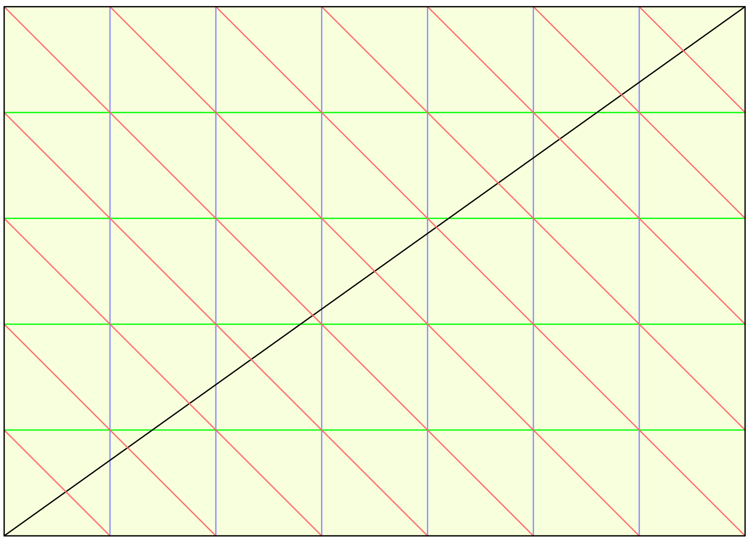
Задача 567. Натуральные числа n и m взаимно просты. Отрезок $[0;1]$ разбит на $m+n$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $m+n-2$ чисел $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, ..., $\frac{m-1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ..., $\frac{n-1}{n}$.

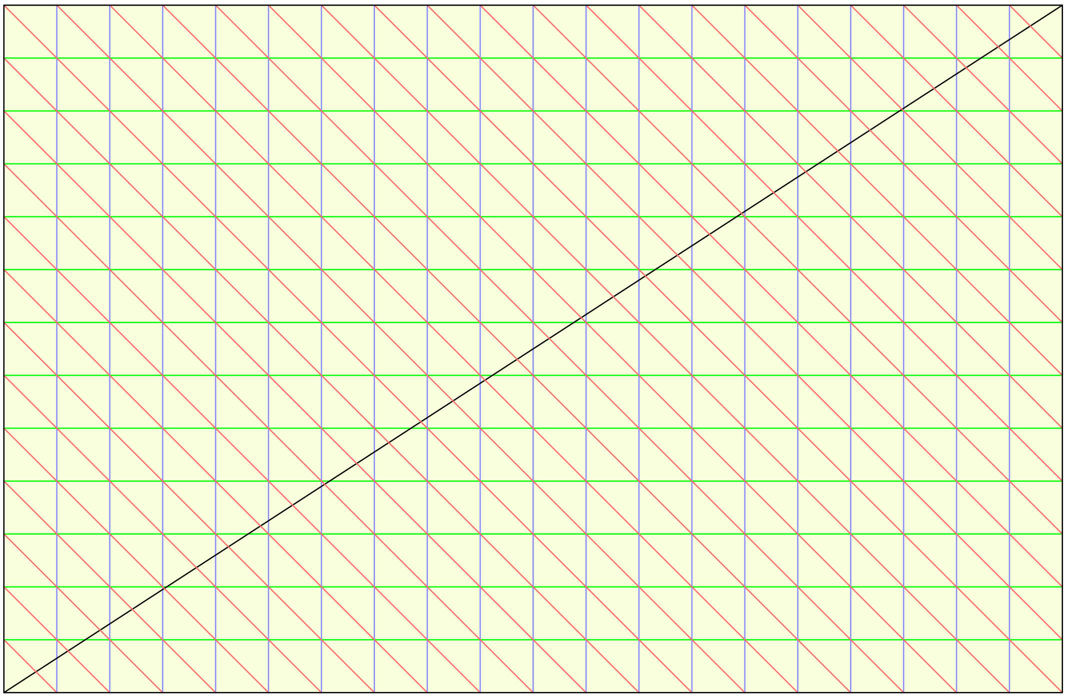
Решение. Каждое из чисел m и n взаимно просто с числом $s=m+n$, поэтому не могут совпасть никакие две из точек вида a/m, b/n, k/s, где $1 \leqslant a < m$, $1 \leqslant b < n$ и $1 \leqslant k < s$). Поскольку $\frac{1}{m} > \frac{1}{s}$ и $\frac{1}{n} > \frac{1}{s}$, любые две из точек вида a/m лежат в разных отрезках вида $[\frac{k}{s}; \frac{k+1}{s}]$ и любые две из точек b/n — тоже. Осталось только доказать, что никакие две точки вида a/m и b/n не могут попасть в один и тот же отрезок вида $[\frac{k}{s}; \frac{k+1}{s}]$. Но это сразу следует из того, что дробь $\frac{a+b}{s}$ лежит между a/m и b/n (угловой коэффициент диагонали OC параллелограмма $OACB$, где O — начало координат, $A=(m;a)$, $B=(n;b)$, заключён между угловыми коэффициентами его сторон).

Второй способ. Нарисуем на клетчатой бумаге прямоугольник размерами $m \times n$ клеток и проведём в нём диагональ — она будет играть роль отрезка $[0;1]$ нашей задачи. Линии одного направления (синие) делят её на m равных частей, другого (зелёные) — на n равных частей. Проведём через вершины клеток ещё ряд параллельных (красных) прямых под углом 45° к сторонам прямоугольника. Они делят диагональ на $s=m+n$ одинаковых отрезков. Утверждение задачи теперь очевидно: на диагонали между любыми двумя сине-зелёными точками обязательно лежит красная точка, поскольку, пересекая какую-то клетку, OE обязательно пересекает и её красную диагональ. (Можно это сказать по-другому: между любыми двумя точками пересечения отрезка OE с соседними красными прямыми лежит точка пересечения с синей или зелёной линией.)



$m=7$, $n=5$

Заметьте: взаимная простота чисел m и n гарантирует, что диагональ не проходит через узлы сетки, отличные от вершин прямоугольника.



$m = 20\,,\ n = 13$