

Задача 524. Ни при каком натуральном m число $1978^m - 1$ не делится на $1000^m - 1$. Докажите это.

Решение. Если при некотором натуральном m число $1978^m - 1$ делится на $1000^m - 1$, то на $1000^m - 1$ делится и разность

$$(1978^m - 1) - (1000^m - 1) = 1978^m - 1000^m = 2^m(889^m - 500^m).$$

Поскольку число $1000^m - 1$ нечётное, то оно взаимно просто с числом 2^m и поэтому на $1000^m - 1$ должна делиться разность $889^m - 500^m$. Однако

$$889^m - 500^m < 1000^m - 1.$$