Задача 520*. Рассмотрим последовательность чисел

$$x_n = \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^n.$$

Каждое из них можно привести к виду $x_n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$, где q_n, r_n, s_n, t_n — целые числа. Найдите пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n}{q_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{q_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{q_n}$.

Решение. Обозначим: $a = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $c = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ и $d = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Наряду с равенством

$$a^n = \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$$

рассмотрим три сопряжённых:

$$\begin{aligned} b^n &= q_n - r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6}, \\ c^n &= q_n + r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6}, \\ d^n &= q_n - r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Из этих четырех равенств находим:

$$\begin{aligned} 4q_n &= a^n + b^n + c^n + d^n, \\ 4r_n\sqrt{2} &= a^n - b^n + c^n - d^n, \\ 4s_n\sqrt{3} &= a^n + b^n - c^n - d^n, \\ 4t_n\sqrt{6} &= a^n - b^n - c^n + d^n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{r_n}{q_n} = \frac{a^n - b^n + c^n - d^n}{(a^n + b^n + c^n + d^n)\sqrt{2}} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n - \left(\frac{d}{a}\right)^n}{\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n + \left(\frac{d}{a}\right)^n\right)\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Стремление величин $(b/a)^n$, $(c/a)^n$ и $(d/a)^n$ к нулю следует из того, что все три числа b/a, c/a и d/a по модулю меньше 1.)

Аналогично можно доказать равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{q_n} = 1/\sqrt{3}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{q_n} = 1/\sqrt{6}$.