Задача 446. Окружность длины 1 катится по окружности длины $\sqrt{2}$. В начальный момент времени точка касания окружности отмечена липкой красной краской. При качении покрашенные точки обеих окружностей вновь красят точки, с которыми они соприкасаются. Сколько различных точек неподвижной окружности будет запачкано к тому моменту, когда подвижная окружность сделает 100 оборотов вокруг неподвижной?

Решение. Выясним сначала, сколько красных следов оставит на неподвижной окружности a (длины $\sqrt{2}$) первая красная точка B подвижной окружности b (длины 1) за n оборотов.

Покатим окружность b по прямой. Тогда (если принять первую красную точку на прямой за начало отсчета O) следы точки B попадут в точки с целыми неотрицательными координатами. Теперь намотаем прямую на окружность a, начав с точки O. Каждому обороту соответствует отрезок прямой длины $\sqrt{2}$. Ясно, что различные красные точки прямой перейдут при этом в различные точки окружности a, поскольку равенство $k_1 - k_2 = m\sqrt{2}$ при целых m и $k_1 \neq k_2$ невозможно (ведь число $\sqrt{2}$ иррационально). Таким образом, за первые n оборотов точка B оставит $\left[n\sqrt{2}\right] + 1$ следов: именно столько целых точек на отрезке $\left[0; n\sqrt{2}\right]$.

Попробуем учесть теперь все многократные следы, оставляемые на окружностях. На первый взгляд кажется, что их количество растет по экспоненте в зависимости от числа оборотов n: после каждого оборота средняя плотность красных точек (число точек, приходящихся на единицу длины) возрастает примерно вдвое — ведь к имеющимся на каждой окружности красным точкам добавляются следы точек с другой окружности. Однако это предположение оказывается совершенно неверным: на окружности a не появится никаких других красных точек, кроме тех, в которые попадает самая первая точка B! Действительно, пусть некоторая точка $B' \in b$ красится при соприкосновении с красной точкой $A \in a$. Поскольку A' — красная, с ней уже соприкасалась до этого первая точка B. Ясно, что, став красной, B' будет попадать в те же самые точки (отстоящие от A' на расстоянии $1, 2, \ldots$ в направлении вращения), в которых уже побывала B после своего соприкосновения с A'.

Точно так же можно доказать, что на окружности b не появится никаких точек, кроме тех, которые закрасит самая первая красная точка $A \in a$, так что через n оборотов на окружности b появится $(n+1)$-я по счёту красная точка. Итак, число красных точек растёт не по показательному, а всего лишь по линейному закону $\left[n\sqrt{2}\right] + 1$.