

Задача 432*. Существует ли натуральное число, сумма цифр десятичной записи квадрата которого равна а) 1977; б) 1978?

в) Какие натуральные числа являются суммами цифр десятичной записи квадрата целого числа?

Решение. Квадрат любого числа либо делится на 9, либо даёт при делении на 9 один из остатков 1, 4 и 7. Поскольку сумма цифр любого натурального числа даёт при делении на 9 тот же остаток, что и само число, то сумма цифр квадрата может быть равна $9n$, $9n + 1$, $9n + 4$ или $9n + 7$, где n — целое неотрицательное число. Докажем, что все такие числа могут быть суммами:

$$9n \text{ — сумма цифр числа } (10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = \\ = \underbrace{9 \dots 9}_{n-1} \underbrace{80 \dots 0}_{n-1} 1.$$

$$9n + 1, \text{ где } n > 0, \text{ — сумма цифр числа } (10^n - 2)^2 = \\ = 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 4 = \underbrace{9 \dots 9}_{n-1} \underbrace{60 \dots 0}_{n-1} 4. \text{ Случай } n = 0 \\ \text{очевиден: сумма цифр числа } 1^2 \text{ равна } 1.$$

$$9n + 4, \text{ где } n > 0, \text{ — сумма цифр числа } (10^n - 3)^2 = \\ = 10^{2n} - 6 \cdot 10^n + 9 = \underbrace{9 \dots 9}_{n-1} \underbrace{40 \dots 0}_{n-1} 9. \text{ Случай } n = 0 \\ \text{опять очевиден: сумма цифр числа } 2^2 \text{ равна } 4.$$

$$9n + 7 \text{ — сумма цифр числа } (10^{n+1} - 5)^2 = 10^{2n+2} - \\ - 10^{n+2} + 25 = \underbrace{9 \dots 9}_n \underbrace{0 \dots 0}_n 25.$$

Таким образом, число 1978 является суммой цифр квадрата, а 1978 — нет.