Задача 413*. Для каких положительных чисел a верно следующее утверждение: для любой непрерывной функции h, определённой на отрезке $[0;1]$ и такой, что $h(0) = h(1)$, уравнение $h(x+a) = h(x)$ имеет решение?

Решение. Докажем сначала существование параллельной оси абсцисс хорды длины $1/n$, где n — натуральное число. Действительно, если $h(x+\frac{1}{n}) \neq h(x)$ ни при каком x, расмотрим функцию $g(x) = h\left(x+\frac{1}{n}\right) - h(x)$, определённую на $\left[0;\frac{n-1}{n}\right]$. Если $g(x)$ всюду положительна, напишем неравенство $h\left(x+\frac{1}{n}\right) > h(x)$ и применим его многократно:

$$h(0) = h(1) > h\left(\frac{n-1}{n}\right) > \ldots > h\left(\frac{1}{n}\right) > h(0).$$

Если $g(x)$ всюду отрицательна, ситуация аналогична.

Осталось заметить, что ни при каком положительном a, не равном $1/n$, где n — натуральное число, график (рассматриваемой на $[0;1]$) функции $\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - x\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right)$ не имеет параллельной оси абсцисс хорды длины a.