Задача 379*. На каждом из нескольких кусков бумаги произвольной формы поставлена клякса произвольной формы. Назовём промокашку подходящей для данного куска бумаги, если её можно так разместить внутри него, что промокашка закроет кляксу. Пусть набор промокашек, являющихся кругами разных радиусов, обладает таким свойством: для любых двух данных кусков бумаги найдётся промокашка, подходящая для обоих кусков. Докажите, что тогда в этом наборе найдётся промокашка, подходящая для всех кругов.

Решение. Рассмотрим один из кусков бумаги. Пусть P_{min} и P_{max} — промокашки наименьшего и наибольшего радиусов, подходящие для этого куска.

Докажем, что круглая промокашка P любого промежуточного радиуса — также подходящая для данного куска. (Заметьте: для промокашек другой формы — например, для прямоугольников — аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно.) Пусть круги P_{min} и P_{max} расположены на куске бумаги так, что каждый из них закрывает кляксу. Тогда круг P можно расположить так, что он будет содержаться в объединении кругов P_{min} и P_{max} и будет содержать пересечение $P_{min} \cap P_{max}$:

$$\textit{клякса} \subseteq P_{min} \cap P_{max} \subseteq P \subseteq P_{min} \cup P_{max} \subseteq \textit{кусок}.$$

Докажем теперь утверждение задачи. Поставим в соответствие каждому из данных кусков бумаги отрезок $[r; R]$ числовой оси, где r и R — радиусы наименьшей и наибольшей подходящей промокашки. По условию, любые два отрезка имеют общую точку.

Пусть ρ — самый правый из левых концов этих отрезков; число ρ, очевидно, не меньше левого конца любого отрезка и не больше наименьшего правого конца, то есть ρ принадлежит всем отрезкам.

Число ρ — радиус одной из промокашек. Она подходит для всех кусков.