

Задача 61. Два мудреца придумали новую игру и играют в неё. Выписаны числа $0, 1, 2, \dots, 1024$. Первый мудрец вычёркивает по своему выбору 512 чисел, второй вычёркивает 256 из оставшихся чисел, затем первый вычёркивает ещё 128 , потом второй — ещё 64 числа и так далее. Своим последним пятым ходом второй вычёркивает одно число. Остаются два числа, и второй платит первому разницу между этими числами.

Как играть первому игроку, чтобы получить как можно больше? Как второму, чтобы проиграть как можно меньше? Сколько уплатит второй первому, если оба будут играть наилучшим образом?

Решение. Докажем два утверждения:

- 1) как бы ни играл второй мудрец, первый может получить не меньше 32 ;
- 2) как бы ни играл первый, второй может играть так, чтобы потерять не больше 32 .

Для доказательства первого утверждения мы укажем такую стратегию первого игрока, которая независимо от ходов второго гарантирует, что разность оставшихся двух чисел будет не меньше 32 . Эта стратегия очень проста: при каждом ходе вычёркивать числа через одно, то есть вычёркивать второе, четвёртое, шестое, \dots число из оставшихся (мы считаем, что числа расположены в порядке возрастания). Теперь после 1-го хода разность между любыми соседними из оставшихся чисел будет не меньше 2 , после 2-го — не меньше 4 , после 3-го — не меньше 8 , после 4-го — не меньше 16 и после 5-го — не меньше 32 .

Для доказательства второго утверждения достаточно указать стратегию второго игрока, которая независимо от ходов первого позволит ему проиграть не больше 32 . Она состоит в следующем. Первым ходом он вычёркивает или все числа, меньшие 512 , или все числа, большие 512 (ясно, что или тех, или других осталось не больше 256). После этого разность между крайними из оставшихся чисел будет не больше 512 . Аналогично, вторым ходом он может добиться того, что все оставшиеся числа будут находиться только в одном из отрезков $[0, 256]$; $[256, 512]$; $[512, 768]$; $[768, 1024]$, то есть уменьшить разность между крайними числами по крайней мере до 256 . Точно так же третьим ходом он может уменьшить эту разность до 128 , четвёртым — до 64 , а пятым — до 32 .