

**Задача 56.** На окружности выписаны в произвольном порядке четыре единицы и пять нулей. В промежутке между двумя одинаковыми числами пишем нуль, между разными цифрами — единицу, а после этого первоначальные цифры стираем. Докажите, что сколько бы раз мы ни повторили эту процедуру, мы никогда не получим набор из девяти нулей.

**Решение.** Предположим противное: в некоторый момент впервые получились девять нулей. Перед этим были девять единиц. Непосредственно перед этим на окружности нули и единицы чередовались; но такое чередование возможно лишь при чётном числе цифр.

Заметьте: мы доказали более сильное утверждение, чем требовалось. А именно, если на окружности выписано нечётное число нулей и единиц, причём встречаются и нули, и единицы, то сколько бы раз мы ни повторяли описанный в задаче процесс, не получим набор из одних нулей.

Нетрудно разобрать и случай, когда количество цифр чётно. Чтобы это сделать, воспользуемся следующей леммой (её можно доказать индукцией по  $k$ ; она справедлива не только для задачи на окружности, но и на прямой): если по движению на  $2^k$  шагов от некоторого места по часовой стрелке и против часовой стрелки приходим к двум одинаковым цифрам, то через  $2^k$  итераций на рассматриваемом месте будет ноль, а если к разным, то — единица.

Следовательно, если на окружности расставлены  $n = 2^k$  цифр — нулей или единиц, — то после  $2^k$  итераций все цифры станут нулями.

Пусть теперь на окружности всего  $n = 2^k L$  цифр, где  $L$  нечётно. Проследим, что происходит после  $2^k$  итераций. Для каждой  $L$  цифр, расположенных через  $2^k$  одна от другой (в вершинах правильного  $L$ -угольника), изменения будут такими же, как будто только эти  $L$  цифр расположены по окружности, с ними выполняется та же операция, и мы следим за каждым шагом. Отсюда нетрудно получить ответ в общем случае: состояние «все нули» достигается в тех и только тех случаях, когда длина наименьшего периода начальной последовательности нулей и единиц равна  $2^k$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$