Задача 39*. а) Целые неотрицательные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2 - mxy + y^2 = 1$ (где m — данное натуральное число, $m > 1$) тогда и только тогда, когда x и y — соседние члены последовательности $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = m$, $a_3 = m^2 - 1$, $a_4 = m^3 - 2m$, $a_5 = m^4 - 3m^2 + 1$, ..., в которой $a_{k+2} = ma_{k+1} - a_k$ для всех $k \geqslant 0$. Докажите это.

б) Рассмотрим случай $m = 3$. Очевидно, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$, $a_4 = 3 \cdot 8 - 3 = 21$. Возникает гипотеза, что для любого n число a_n — это $2n$-й член последовательности Фибоначчи. Докажите эту гипотезу.

Решение. а) Применим индукцию для доказательства того, что соседние члены рассматриваемой последовательности удовлетворяют уравнению. *База.* $0^2 - m \cdot 0 \cdot 1 + 1^2 = 1$. *Переход.* В последовательности a_0, a_1, a_2, ... за каждой парой $a_k = x$, $a_{k+1} = y$ следует пара $(a_{k+1}; a_{k+2}) = (a_{k+1}; ma_{k+1} - a_k) = (y; my - x)$. Очевидно,

$$y^2 - my(my - x) + (my - x)^2 = y^2 - (my - x)(my - (my - x)) = y^2 -$$

что и требовалось.

Теперь докажем, что других решений в целых неотрицательных числах у рассматриваемого уравнения нет. Предположим, что $X^2 - mXY + Y^2 = 1$ и $0 \leqslant X \leqslant Y$. Если при этом $X = 0$, то, очевидно, $Y = 1$. Если же $X > 0$, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y = X, \\ my - x = Y. \end{cases}$$

Очевидно, $x = mX - Y$ и $y = X$. Если $mX - Y < 0$, то $mXY < Y^2$ и $1 = X^2 - mXY + Y^2 > X^2 \geqslant 1$, что невозможно. Значит, $x = mX - Y \geqslant 0$. Если $x = 0$, то $y = 1$. Если же $x > 0$, то пара натуральных чисел $(x; y)$ удовлетворяет равенству $x^2 - mxy + y^2 = 1$ и условиям $x < y = X \leqslant \leqslant Y$ (проверьте!). Переходя таким образом от пары $(X; Y)$ к предшественнице $(x; y)$, затем от $(x; y)$ — к её предшественнице и так далее, мы рано или поздно должны будем остановиться, а остановиться сможем лишь тогда, когда получим решение $(x; y) = (0; 1)$. Значит, за конечное число операций вида $(X; Y) \to (x; y)$ мы из любого решения в натуральных числах получим решение $(0; 1)$. Поэтому, идя по этой цепочке в обратном направлении, то есть начав с пары $(0; 1)$ и многократно выполняя преобразование $(x; y) \to (X; Y)$, мы получим любое решение уравнения в целых неотрицательных числах $x \leqslant y$.

б) Рассуждайте по индукции, предварительно доказав тождество $\varphi_{n+4} = 3\varphi_{n+2} - \varphi_n$.

Замечание. Уравнение $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ заменой $y = = x - z$ приводится к знаменитому уравнению $z^2 + zx - - x^2 = 1$. Его решения $(x; z) = (\varphi_{2n}; \varphi_{2n-1})$ соответствуют решениям исходного уравнения в неотрицательных целых числах x и y, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant y$. Значит, $(x; y) = (x; x - z) = (\varphi_{2n}; \varphi_{2n} - \varphi_{2n-1}) = (\varphi_{2n}; \varphi_{2n-2})$.