Задача 32. Во всех клетках таблицы размером 100×100 стоят плюсы. Разрешено одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или во всех клетках одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, где ровно 1970 минусов?

Решение. Предположим, что получить такую таблицу удалось. Расположенный на пересечении строки, знаки в которой меняли x раз, и столбца, знаки в котором меняли y раз, знак менялся $x+y$ раз. Сумма $x+y$ чётна тогда и только тогда, когда числа x и y одинаковой чётности: либо оба чётны, либо оба нечётны.

Пусть a — количество строк, для каждой из которых соответствующая величина x нечётна, b — количество столбцов, для каждого из которых нечётна соответствующая величина y. Тогда число минусов в таблице равно

$$a(100-b)+(100-a)b.$$

Получили уравнение

$$100a+100b-2ab=1970,$$

откуда $ab-50a-50b=-985$, то есть

$$(a-50)(b-50)=ab-50a-50b+2500=1515=15\cdot101.$$

Поскольку число 101 простое и $0\leqslant a\leqslant100$ и $0\leqslant b\leqslant100$, получили противоречие.