

Задача 31. Квадратный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезают на две части, и так делают много раз. Какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось 100 двадцатиугольников?

Решение. При каждом разрезании общее число кусков бумаги увеличивается на 1 (один кусок превращается в два новых), поэтому после n разрезов будет $(n + 1)$ кусков бумаги.

Подсчитаем, каким может быть общее число вершин во всех кусках вместе после n разрезов. При каждом разрезании общее число вершин увеличивается на 2 (если резали через две вершины), на 3 (если резали через вершину и сторону) или на 4 (если резали через стороны). Поскольку сначала было 4 вершины, то после n разрезов во всех кусках вместе будет не больше $4n + 4$ вершин.

Предположим, что после n разрезов получилось 100 двадцатиугольников. Поскольку при этом общее число полученных кусков будет $n + 1$, то, кроме этих двадцатиугольников, будет ещё $n + 1 - 100$ кусков. В каждом из этих кусков не меньше трёх вершин, поэтому общее число вершин не меньше $20 \cdot 100 + 3(n - 99) = 3n + 170$.

Значит, $4n + 4 \geq 3n + 170$, откуда $n \geq 1699$. Это основная и самая трудная часть доказательства.

Покажем теперь, как можно получить 100 двадцатиугольников, сделав 1699 разрезов. Вот один из способов: разрежем квадрат на 100 прямоугольников (99 разрезов) и каждый прямоугольник за 16 разрезов превратим в двадцатиугольник, отрезая от углов треугольники (1600 разрезов). Всего — 1699 разрезов.