Задача 25. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

Решение. Выбрана половина из всех 2^n подмножеств. Если бы для какого-то выбранного подмножества A было бы выбрано и его дополнение $\overline{A}$, то получили бы противоречие: $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Следовательно, из каждой пары подмножеств, дополняющих друг друга, выбрано в точности одно.

Если A и B выбраны, то выбрано и $A \cap B$, поскольку

$$A \cap B \cap \overline{A \cap B} = \varnothing.$$

Теперь по индукции можно доказать, что если A_1, A_2, …, A_n выбраны, то и пересечение $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ тоже выбрано. Следовательно, пересечение всех 2^{n-1} выбранных подмножеств принадлежит к числу выбранных; значит, оно не пусто.

Таким образом, условию задачи удовлетворяет только такая система подмножеств: фиксируется некоторый элемент множества и выбираются все подмножества, содержащие этот элемент.