Задача 5*. В множестве E, состоящем из n элементов, выделены m различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для любых двух элементов множества E существует единственное выделенное подмножество, содержащее оба элемента. Докажите неравенство $m \geqslant n$.

Решение. Пусть $n > m$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — выделенные подмножества множества E. Для каждого элемента x множества E через $f(x)$ обозначим количество выделенных множеств, которым x принадлежит:

$$f(x) = \left|\{k \mid x \in A_k\}\right|.$$

Если $x \neq A_s$, то для любого элемента $y \in A_s$ должно существовать такое множество A_k, что $x \in A_k$ и $y \in A_k$, причём $k \neq s$ и поэтому каждому из $|A_s|$ элементов y множества A_s соответствует своё уникальное k; следовательно, при $x \notin A_s$ имеем $f(x) \geqslant |A_s|$ и, тем более, $nf(x) > m|A_s|$, то есть

$$n(m - f(x)) < m(n - |A_s|).$$

Теперь противоречие получить несложно:

$$1 = \sum_{x \in E} \frac{1}{n} = \sum_{x \in E} \sum_{x \notin A_s} \frac{1}{n(m - f(x))} =$$

$$= \sum_{x \notin A_s} \frac{1}{n(m - f(x))} > \sum_{x \notin A_s} \frac{1}{m(n - |A_s|)} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant s \leqslant m} \sum_{x \notin A_s} \frac{1}{m(n - |A_s|)} = \sum_{1 \leqslant s \leqslant m} \frac{1}{m} = 1.$$

Число 1 не может быть больше само себя.