Задача 1. а) В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес, приблизилось время новых президентских выборов. В Анчурии 20 000 000 избирателей, из которых только один процент (армия Анчурии) поддерживает Мирафлореса. Он хочет быть демократически избранным. «Демократическим голосованием» Мирафлорес называет вот что: всех избирателей разбивают на несколько равных групп, затем каждую из этих групп вновь разбивают на некоторое количество равных групп, затем эти последние группы снова разбивают на равные группы и так далее; в самых мелких группах выбирают представителя группы — выборщика, затем выборщики выбирают представителей для голосования в ещё большей группе и так далее; наконец, представители самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес сам делит избирателей на группы. Может ли он так организовать выборы, чтобы его избрали президентом? (При равенстве голосов побеждает оппозиция.)

б*) Какое наименьшее число сторонников необходимо Мирафлоресу, чтобы он мог победить на таких выборах, если в стране $N = 2^a p_1 p_2 \ldots p_n$ избирателей, где $a \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ — целые числа, а p_1, p_2, ..., p_n — нечётные простые числа?

Решение. а) Да, сможет. Если 9 избирателей разбиты на три группы по три избирателя так, что в двух группах есть по два сторонника Мирафлореса, то победят сторонники Мирафлореса, хотя их — 4 из 9. Значит, на многоступенчатых выборах может победить кандидат, за которого проголосовало меньшинство.

Нетрудно сообразить, что при двуступенчатых выборах с бóльшим числом избирателей процент голосов, необходимый для победы, может быть ещё меньше, но всё-таки заведомо больше 25%. При трёхступенчатой системе этот процент можно сделать ещё ниже. Например, заменив в предыдущей конструкции каждого избирателя группой из 100 человек так, что все группы противников Мирафлореса состоят только из его противников, а в группах сторонников — 51 сторонник и 49 противников, то мы получим пример ситуации, где сторонники Мирафлореса составляют только $\frac{4}{9}\frac{51}{100} = \frac{17}{75}$ от общего числа избирателей и тем не менее побеждают.

После этих предварительных замечаний перейдём непосредственно к решению задачи. Разобьём всех избирателей на 5 групп по 4 миллиона в каждой так, что две группы целиком состоят из противников Мирафлореса. Каждую из этих групп «первого ранга» разобьём на 5 групп второго ранга, причём из пяти групп, составляющих любую группу сторонников первого ранга, три — сторонников. Поскольку

$$20\,000\,000 = 5^7 \cdot 4^4,$$

то удобно проводить выборы в $7 + 4 = 11$ туров; для победы Мирафлореса достаточно, чтобы за него проголосовало $3^{11} = 177\,147$ избирателей, что меньше одного процента. Впрочем, воспользовавшись разложением

$$20\,000\,000 = 5^7 \cdot 8^2 \cdot 4,$$

видим, что Мирафлоресу достаточно иметь $3^7 \cdot 5^2 \cdot 3 = 164\,025$ сторонников.

б) Рассмотрим такое разбиение N человек на группы (рангов 1, 2 и так далее), при котором побеждает Мирафлорес, а число его сторонников — наименьшее возможное. Очевидно, тогда в группах, голосующих против Мирафлореса, нет ни одного его сторонника, а все группы сторонников разбиты следующим образом: если некоторая группа сторонников состоит из k групп следующего ранга, то среди них $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$ групп сторонников.

Итак, пусть каждая группа r-го ранга ($r = 1, 2, \ldots, m-1$) разбита на k_r групп меньшего ранга, а группы m-го ранга состоят из 1 человека каждая. Тогда для победы Мирафлоресу необходимо иметь по крайней мере

$$B = \left(\left[\frac{k_1}{2} + 1\right]\right)\left(\left[\frac{k_2}{2} + 1\right]\right)\ldots\left(\left[\frac{k_m}{2} + 1\right]\right)$$

голосов. Задача сведена к следующей: *разложить данное число N в произведение таких сомножителей $k_1, k_2, \ldots, k_m$, чтобы величина B была минимальной.*

Пусть

$$N = k_1 k_2 \ldots k_m$$

— такое разложение. Как показывает следующая лемма, можно считать, что в нём нет сомножителей вида $k = pq$, где $p > 2$ и $q > 2$ (иначе мы смогли бы провести разложение N на множители, не увеличив при этом B).

Лемма. *Если p, q — натуральные числа, $p > 2$, $q > 2$, то*

$$\left(\left[\frac{p}{2}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{q}{2}\right] + 1\right) \leqslant \left[\frac{pq}{2}\right] + 1.$$

Доказательство. Если p и q чётны, то неравенство можно переписать так:

$$\left(\frac{p}{2} + 1\right)\left(\frac{q}{2} + 1\right) \leqslant \frac{pq}{2} + 1,$$
$$(p+2)(q+2) \leqslant 2pq + 4,$$
$$pq - 2q - 2p + 4 \geqslant 4,$$
$$(p-2)(q-2) \geqslant 4,$$

что, очевидно, верно для чётных $p > 2$ и $q > 2$.

Если одно из чисел p и q, например p, чётно, а другое (q) нечётно, имеем:

$$\left(\frac{p}{2} + 1\right)\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{pq}{2} + 1,$$
$$(p+2)(q+1) \leqslant 2pq + 4,$$
$$pq - 2q - p + 2 \geqslant 0,$$
$$(p-2)(q-1) \geqslant 0,$$

что не вызывает сомнений.

Наконец, если p и q оба нечётны, имеем:

$$\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{pq}{2} + \frac{1}{2},$$
$$(p+1)(q+1) \leqslant 2pq + 2,$$
$$pq - q - p + 1 \geqslant 0,$$
$$(p-1)(q-1) \geqslant 0,$$

что верно. Доказательство леммы завершено.

Итак, нечётные N следует раскладывать на множители «до конца». Осталось разобраться с двойками, входящими в разложение N на простые множители.

Можно считать, что в разложении $N = k_1 k_2 \ldots k_m$ нет сомножителей вида $2q$, где q нечётно, поскольку

$$\left(\left[\frac{2}{2}\right]+1\right)\left[\frac{q}{2}\right]=\left[\frac{2q}{2}\right]+1.$$

Поэтому можно считать, что любое чётное из чисел k_1, k_2, ..., k_r — это степень двойки. В силу леммы, степени двойки можно рассматривать не все, а только 2^1, 2^2 и 2^3 (следующую степень $2^4 = 4 \cdot 4$ уже можно разложить в произведение множителей, которые больше 2).

Поскольку

$$\left(\left[\frac{2}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{2}{2}\right]+1\right)=4>\left[\frac{4}{2}\right]+1,$$

то разложение $2 \cdot 2$ хуже, чем 4. Аналогично, поскольку

$$\left(\left[\frac{2}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{4}{2}\right]+1\right)=6>\left[\frac{8}{2}\right]+1,$$

то выгодно $2 \cdot 4$ заменить на 8.

Далее таким же образом выясняем, что $4 \cdot 4$ лучше, чем $2 \cdot 8$; а разложение $4 \cdot 4 \cdot 4$ менее выгодно, чем $8 \cdot 8$.

Теперь, немного подумав, можно найти окончательный ответ. Чтобы он не занял слишком много места, введём обозначение: $P = \frac{p_1+1}{2}\frac{p_2+1}{2}\ldots\frac{p_n+1}{2}$. Итак, если

$a = 3b$, то $B = 5^b P$;

$a = 3b + 2$, то $B = 3 \cdot 5^b P$;

$a = 1$, то $B = 2P$;

$a = 3b + 4$, то $B = 3^2 \cdot 5^b P$.