странения света в среде с изменяющейся скоростью света, можно перенести на поиск уравнения для брахистохроны. Другими словами, траектория скорейшего спуска между точками A и B должна удовлетворять такому уравнению:

$$\frac{\sin\left(\alpha(y)\right)}{\sqrt{y}} = \text{const} .$$

Простое сравнение этой формулы с полученной ранее формулой $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{y}{2r}}$ показывает, что траекторией скорейшего спуска должна быть перевернутая циклоида.

Как спуститься быстрее без циклоиды? Для того чтобы ускорить движение между точками A и B, не обязательно спускаться по циклоиде. Можно, например, заменить путь по наклонной плоскости двумя наклонными плоскостями, расположенными чуть ниже. Кстати, такие эксперименты ставил еще Галилей, пытаясь найти брахистохрону задолго до И.Бернулли. Простой расчет, который мы предлагаем сделать самостоятельно, показывает, что время скольжения по такой ломаной наклонной плоскости будет почти всегда меньше, чем по обычной.

Если вертикальный размер горки h не превышает ее горизонтального размера L, то время спуска по любой ломаной наклонной плоскости, лежащей ниже обычной наклонной плоскости, окажется меньше. Как показали расчеты, выигрыш во времени (в %) для каждого h/L зависит от того, где находится перегиб и насколько он глубокий. На рисунке 53 показаны различные ломаные наклонные плоскости с переломом в начале, середине и конце горки с $h/L = 0{,}2$. Если мы с самого начала заменяем пологий спуск очень крутым, то быстро разгоняемся до максимальной скорости, а потом уже по инерции преодолеваем вто-

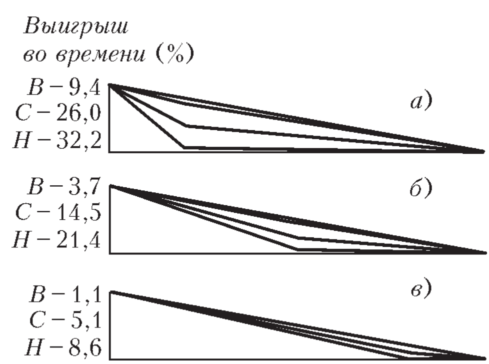

Рис.53. Пологая горка: выигрыш во времени при спуске по ломаной наклонной плоскости, по сравнению с обычным спуском, в тех случаях, когда перелом находится ближе к началу (а), в середине (б) и в конце горки (в); B, C и H соответствуют верхней, средней и нижней ломаным в каждом случае

рую, почти горизонтальную часть пути до точки B. Поэтому неудивительно, что максимальный выигрыш (32,2%) соответствует тому случаю, когда перелом глубокий и находится в начале горки.

Когда горка крутая ($h > L$), выигрыш от спуска по ломаной наклонной плоскости очень мал и никогда не превышает 7%. Это объясняется тем, что, скатываясь по крутой горке, мы и без излома быстро набираем скорость, а излом значительно удлиняет путь. Поэтому максимальный выигрыш для крутых горок соответствует не самому глубокому перелому, а промежуточному. Так, для горки с $h/L = 2$, изображенной на рисунке 54, максимальный выигрыш во времени спуска (2,2%) соответствует верхней ломаной. Когда же изломы при спуске с крутых горок становятся очень глубокими, спуск по таким ломаным плоскостям становится уже невыгодным (см. ломаные C и H на рисунке 54), и вместо ускорения спуска мы слегка запаздываем.

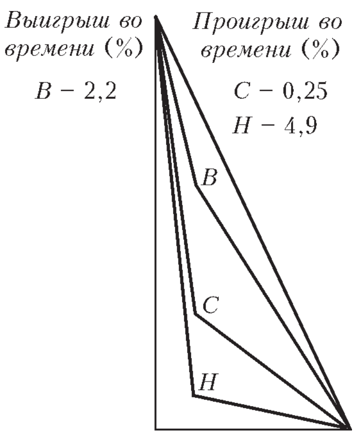

Рис.54. Крутая горка: выигрыш и проигрыш во времени при спуске по ломаной наклонной плоскости, по сравнению с обычным спуском по наклонной плоскости

Таким образом, спуск по ломаным наклонным плоскостям дает выигрыш во времени только тогда, когда горки пологие.

А может ли быть на «быстрой» горке горб? Да, может, и это легко объяснить.

Сначала заменим обычную наклонную плоскость ломаной, по

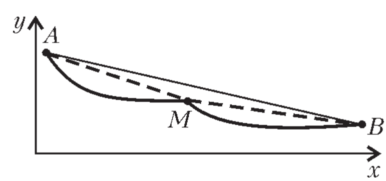

Рис.55. Иногда даже горб на пути спуска с горы не помешает прийти раньше того, кто просто катится по наклонной плоскости

которой спуск окажется быстрее (пунктирная линия на рисунке 55). А потом пойдем еще дальше – заменим каждый из двух линейных участков такой горки циклоидами и получим «быструю»горбатую горку.

ГЛАВА 8

КАК МЫ ПЛАВАЕМ

Если спросить у любого, как он плавает, то следует, по-видимому, ожидать два варианта ответов. В первом случае вам начнут объяснять, каким стилем и как быстро они преодолевают водные преграды. Во втором – скажут, что садятся в лодку, катер или на корабль. Вряд ли среди спрашиваемых найдется человек, который после вашего вопроса станет объяснять физические основы нашей способности держаться на воде или вычислять коэффициент полезного действия гребцов в лодке. Попробуем сыграть роль такого человека – теоретика плавания – и ответить на несколько вопросов, касающихся физической теории плавания.

Почему мы сразу не тонем? Хорошо умеющих плавать обидит такая форма вопроса. Однако твердо установлено, что человек, оставшийся один на один с водной стихией далеко от берега, рано или поздно все равно утонет. Объясняют это тем, что у несчастного кончатся силы, и он перестанет выполнять плавательные движения, за счет которых он держится на поверхности воды.

Как это ни обидно, но даже самые умные из нас примерно на 70% состоят из обычной воды. Поэтому бытующее в народе мнение, что если человека сильно ударить, то от него «одно мокрое место» останется, имеет под собой вполне научную основу. Таблица 6 показывает, из чего мы состоим на самом деле и какова плотность различных составляющих (тканей) нашего организма.

Таблица 6

Плотность различных тканей человека

	Отношение массы ткани к массе тела, %	Плотность ткани, в 1000 кг/м^3
Мышцы	43	1,04
Жир	14	0,92
Кости	10	1,90
Кровь	8	1,04

Большую часть нашего тела составляют мышцы. Так как их плотность больше, чем у воды, то при плавании они должны тянуть нас на дно. Еще больше, как следует из таблицы 6, тянут на дно наши кости. Кажется, что только жировая прослойка может спасти нас от быстрой гибели. Однако это не совсем верно.

Внутри каждого человека есть воздушный мешок – легкие. Объем воздуха в легких человека может изменяться от 1 литра (при глубоком выдохе) до 6 литров (при глубоком вдохе). Так как плотность воздуха приблизительно в 800 раз меньше, чем у воды, то каждый литр воздуха в наших легких по закону Архимеда создает подъемную силу около 9,8 Н. Соответственно, плотность тела человека $\rho_ч$ изменяется от 940–990 $кг/м^3$ при полном вдохе до 1010–1070 $кг/м^3$ при полном выдохе.

Голова – всему помеха! Оценивая плавучесть человека, необходимо учитывать, что голова человека, объем которой составляет около 7% объема его тела, всегда должна находиться над поверхностью воды. Пусть человек в воде занимает вертикальное положение. Легко показать, что в таком случае будет справедлива следующая формула для отношения абсолютных величин архимедовой силы $F_А$ и силы тяжести $F_т$, действующих на человека в воде:

$$\frac{F_А}{F_т} = 0{,}93\frac{\rho_в}{\rho_ч},$$

где $\rho_в$ и $\rho_ч$ – плотности воды и человека соответственно. Отсюда следует, что даже при самом глубоком вдохе архимедовой силы не хватит для полной компенсации силы тяжести плывущего человека. Но даже если бы архимедова сила и была равна силе тяжести человека, он не смог бы неподвижно лежать в воде, находясь в горизонтальном положении. Это вызвано тем, что архимедова сила и сила тяжести приложены к разным точкам тела: $F_А$ приложена в центре масс вытесненной телом жидкости (точка A на рисунке 56), а $F_т$ – в центре масс тела (точка G на рисунке 56). Вторая точка из-за наличия воздуха в легких всегда находится дальше от головы, чем первая. В результате $F_А$ и $F_т$ образуют пару сил,

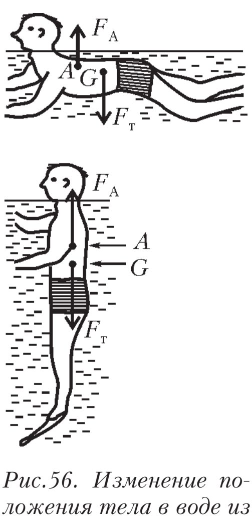

Рис.56. Изменение положения тела в воде из горизонтального в вертикальное под действием силы тяжести $F_т$ и выталкивающей архимедовой силы $F_А$

которая вращает тело в вертикальной плоскости, пока оно не примет вертикальное положение.

Легко ли плыть в вертикальном положении? Итак, если считать, что в вас достаточно жира и воздуха, чтобы сразу не утонуть, то можно утверждать, что вскоре после того, как вас бросят в воду, вы примете вертикальное положение. Однако каждому ясно, что плыть вперед, находясь в вертикальном положении, очень трудно – мешает огромное сопротивление жидкости, которое, как известно, пропорционально площади поперечного сечения двигающегося тела. Интересно, что одним из требований, предъявляемых к пловцам первого разряда на флоте царской России, было умение проплыть стоя без помощи рук 20 сажень (1 сажень = 2,13 м). Оценка показывает, что площадь поперечного сечения тела человека на уровне пояса почти в 10 раз меньше, чем площадь сечения вдоль его позвоночника. Поэтому перед тем как плыть, лучше все-таки принять горизонтальное положение. Обычно это делают просто болтая ногами.

Что мешает болтать ногами? Найдем силу F, действующую на тело при его движении в воде со скоростью v. Силы сопротивления жидкости (или газа) движению тел зависят от их скорости. При малых v почти все частицы жидкости перед движущимся на них телом имеют достаточно времени, чтобы отойти в сторону, не приобретая при этом импульса в направлении скорости тела, за исключением тех частиц, которые коснулись тела, – они приобретают его скорость. Эти частицы, двигаясь вместе с телом, будут в свою очередь увлекать очень тонкий слой жидкости, с которым они соседствуют. Чем крепче связаны между собой частицы жидкости, или, что одно и то же, чем больше вязкость жидкости, тем больше сила сопротивления, действующая на тело. В этом случае сила сопротивления прямо пропорциональна величине v, среднему размеру тела в плоскости, перпендикулярной движению, и вязкости жидкости.

Точную формулу для силы сопротивления при малых v можно получить, например, для тела, имеющего форму шара. Эта формула, называемая формулой Стокса, имеет такой вид:

$$F_1 = 3\pi\eta D v\,,$$

где D – диаметр шара, а η – коэффициент вязкости, равный для воды $0{,}001\ \text{Па}\cdot\text{с}$. Таким образом, если скорость движения тела невелика, то на него будет действовать сила, по величине прямо пропорциональная скорости и противоположная ей по направлению.

Пусть теперь скорость тела возросла, и частицы жидкости, находящиеся на его пути, уже не успевают отходить в сторону и увлекаются вперед. В этом случае за время t тело успеет натолкнуться на массу жидкости, равную $vtS\rho_в$, где S – площадь поперечного сечения тела. Всей этой массе жидкости тело сообщит скорость v и импульс $v^2tS\rho_в$. Поэтому силу сопротивления, действующую на тело со стороны жидкости при больших скоростях, которую часто называют силой лобового сопротивления, можно вычислить по следующей формуле:

$$F_2 = v^2 S\rho_в .$$

Конечно, и при больших скоростях сила сопротивления зависит от вязкости. Чтобы оценить, как изменяется вклад «вязких» сил сопротивления с увеличением скорости тела, найдем отношение F_2 к F_1 для шара диаметром D:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{12}\frac{Dv\rho_в}{\eta} .$$

Выражение $Dv\rho_в/\eta$, являющееся безразмерной величиной, называется числом Рейнольдса и обозначается Re. Из последнего соотношения следует, что при $Re > 100$ вязкостью среды можно пренебречь, а силу сопротивления вычислять по формуле для F_2. Наоборот, при малых числах Рейнольдса, $Re \ll 1$, следует учитывать только вязкость жидкости, а вычисление силы сопротивления проводить по формуле для F_1.

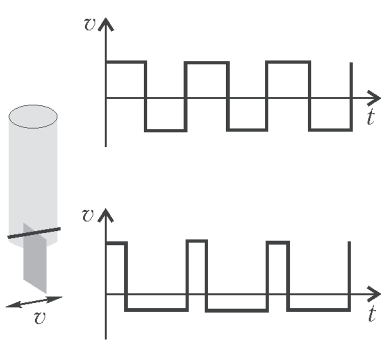

Рис.57. Слева представлена модель русалки, пытающейся перейти из вертикального положения в горизонтальное, двигая ластой. Справа показаны графики изменения скорости ласты v от времени t при симметричном (вверху) и несимметричном (внизу) движении

Русалка с ластой и число Рейнольдса. После такого отступления в область гидродинамики вернемся к задаче о том, каким образом нужно болтать ногами, чтобы перевести наше тело из вертикального положения в горизонтальное. Чтобы упростить задачу, будем считать, что мы используем для этого одну ласту, надетую на обе ноги, как у русалки, а тело русалки заменим полузатопленным поленом, к нижнему концу которого и прикреплена подвижная ласта с площадью поверхности S, способная двигаться в горизонтальном направлении (рис.57). Будем также считать, что ласта не деформируется при движении, а ее масса пренебрежимо мала по сравнению с массой полена, чтобы не учитывать перемещений суммарного центра масс при изменении положения ласты относительно полена.

Пусть частота болтания ластой составляет 1 Гц, а амплитуда равна 0,25 м. Тогда средняя скорость ее движения будет 0,5 м/с. Считая, что «размер» ласты около 0,2 м, а вязкость воды 0,001 $\text{Па} \cdot \text{с}$, получаем $Re = 100000$. Таким образом, при болтании ногами «вязкими» силами можно пренебречь, а силу сопротивления надо вычислять, используя формулу для F_2.

Симметрично или нет? Пусть сначала график изменения скорости ласты от времени выглядит симметрично, т.е. и скорость и интервалы движения ластой влево и вправо одинаковы. Очевидно, что в этом случае сила сопротивления воды, а также ее средний импульс при движении влево и вправо тоже будут одинаковы, а значит, тело русалки так и останется вертикальным.

Попробуем теперь двигать ласту влево с большей скоростью v_1, чем вправо со скоростью v_2 (см. нижний график на рисунке 57). Так как расстояния, проходимые ластой при ее движениях влево и вправо, должны быть равны, то $v_1 t_1 = v_2 t_2$, где t_1 и t_2 – длительности движения ласты влево и вправо соответственно. Легко показать, что при таких «несимметричных» движениях ласты средняя сила, действующая на русалку и направленная вправо, будет равна

$$F_{\text{ср}} = v_1^2 S \rho_{\text{в}} \frac{t_1}{t_2} \frac{t_2 - t_1}{t_1 + t_2}.$$

Таким образом, любые повторяющиеся несимметричные движения ластами приведут к тому, что мы примем горизонтальное положение и поплывем.

А если мы оказались в бочке с медом? Вязкость меда в 10000 раз больше, чем у воды. Поэтому двигать ластами, находясь в бочке с медом, очень трудно. Даже если предположить, что скорость наших движений в таких условиях уменьшится только в 10 раз (от 0,5 м/с до 0,05 м/с), то отношение силы лобового сопротивления к вязкой силе составит менее 1/10. Это значит, что основными силами, действующими при движении ласты в меде, являются силы вязкости F_1. Попробуем теперь получить выражение для $F_{\text{ср}}$ в случае несимметричных движений. Как легко показать, при любых v_1, t_1 и v_2, t_2, для которых справедливо равенство $v_1t_1 = v_2t_2$, средняя за цикл сила, действующая на ласту, будет равна нулю. А это значит, что в очень вязкой жидкости, где число $Re \ll 1$, плавать надо не так, как в воде, а по-другому.

Большие трудности малых существ. Как следует из формулы для отношения F_2/F_1, очень малые существа, даже плавая в воде, могут сталкиваться с такими же трудностями, что и мы в воображаемом медовом озере. Известно, что бактерии, размер которых около 1 мкм, плавают в воде со скоростью 0,1 мм/с. Легко посчитать, что число Рейнольдса для таких движений бактерий близко к 10^{-4}, заставляя их использовать при плавании только силы вязкого трения. Каким же образом двигают бактерии своими жгутиками, чтобы сдвинуться с места?

Диаметр жгутика чуть больше 100 Å, и он, конечно, лишен мускулатуры, поэтому бактерия не может по своему желанию согнуть жгутик или пустить вдоль него волну деформаций, как делают змеи или некоторые рыбы для своего движения. Единственное, что может делать бактерия, – закручивать жгутик вдоль оси, как штопор. Для этого в месте соединения жгутика с телом бактерии есть специальный молекулярный моторчик – предмет исследования многих ученых, которые до сих пор до конца не знают, как он работает. Бактерии вращают жгутиком с

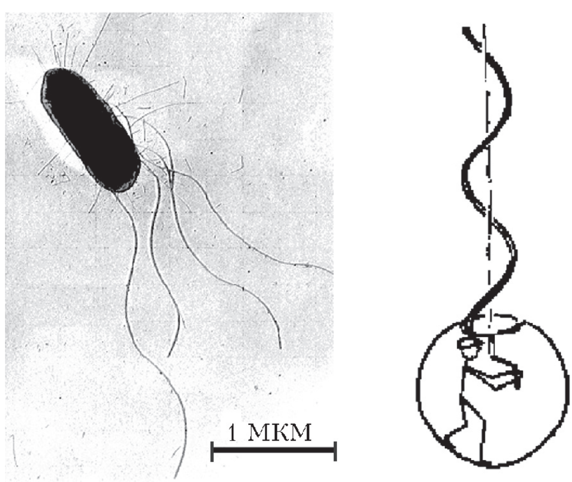

Рис.58. Фото бактерии кишечной палочки и схематическое изображение принципа ее движения с помощью закручивания жгутика

частотой несколько герц, часто меняя направления движения (рис.58).

Все знают, что круговые движения штопора продвигают его либо вперед, либо назад в зависимости от того, против или по часовой стрелке мы крутим рукоятку. То же самое происходит и с бактерией, когда она крутит свой жгутик. Он «вкручивается» или «выкручивается» из жидкости, которая для него является очень вязкой ($Re < 10^{-5}$), двигая бактерию вперед или назад.

Как плыть быстрее? Для этого необходимо не только изо всех сил двигать руками и ногами в определенной последовательности, но и ориентировать свое тело так, чтобы испытывать минимальное сопротивление воды. Согласно формуле для F_2, сила лобового сопротивления воды пропорциональна площади поперечного сечения тела S, но это выражение дает завышенное значение для силы, так как не все частицы воды при столкновении с телом приобретут его скорость. Однако этой формулой можно пользоваться, если в правой части добавить безразмерный коэффициент C_D – коэффициент лобового сопротивления:

$$F_2 = \frac{1}{2} C_D v^2 S \rho_в .$$

Как показывают эксперименты, C_D сильно зависит от формы тела (рис.59). Большие различия в C_D возникают из-за того, что

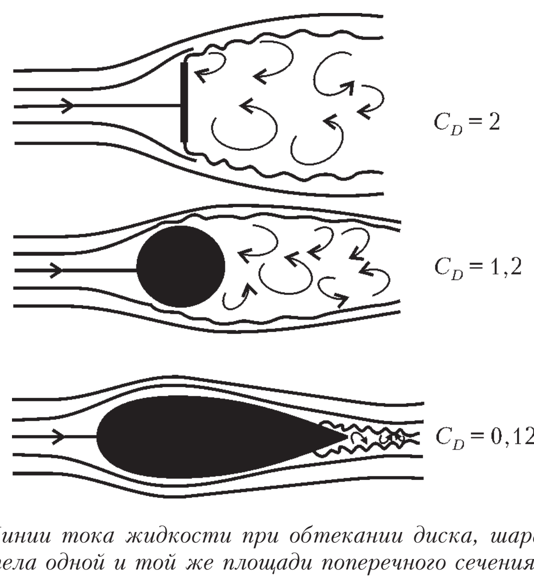

Рис.59. Линии тока жидкости при обтекании диска, шара и каплевидного тела одной и той же площади поперечного сечения

вода по-разному обтекает различные тела. За диском и шаром, например, образуется зона вихрей. А это значит, что, двигая эти тела вперед, мы должны тратить энергию не только на преодоление вязкого трения, но и на возникновение вихрей. В отличие от шара и диска, за каплевидным обтекаемым телом вихри почти не образуются, и поэтому сила сопротивления воды для движения такого тела меньше, хотя его площадь поперечного сечения такая же.

Как плавают рыбы? Число Рейнольдса для небольших рыб составляет более 100, поэтому вращать «штопор», как это делают бактерии, им невыгодно. Рыбы используют, по крайней мере, два типа плавания – волнообразные движения всего тела или движения только хвоста (рис.60). Рыбы, имеющие змееоб-

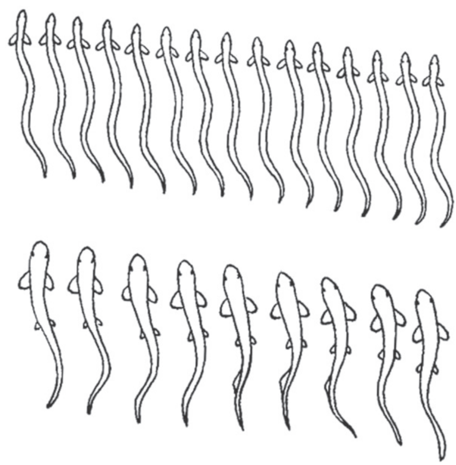

Рис.60. Два вида плавания рыб – волнообразное и использующее только движение хвоста

разную форму (например, угорь), применяют первый тип плавания, изгибая тело так, что этот изгиб движется от головы к хвосту, отталкивая назад воду, в результате чего рыба движется вперед. При втором типе движения воду отталкивает назад быстро распрямляющийся хвост рыбы.

Неразгаданные загадки плавания меч-рыбы и дельфина. Ученые до сих пор не могут ответить на вопрос, как многие рыбы и дельфины умудряются двигаться в воде со скоростями, недоступными иногда даже для птиц, летящих в воздухе. Меч-рыба, например, плывет со скоростью до 130 км/ч, тунец – до 90 км/ч. Если изготовить муляж меч- рыбы и определить