сделки состояние одного из них (покупателя или продавца) становится больше, а другого – на столько же меньше, хотя они могут и не догадываться об этом, так как точную цену товара или услуги определить невозможно. Закон сохранения суммарного богатства действует также при обмане или грабеже – богатство лишь переходит от одного человека к другому.

Объясняем компьютеру, как торговать. Возможно, многим такая аналогия между обществом и газом все же кажется недостаточной. Для того чтобы объяснить экспоненциальный характер распределения богатства в обществе, смоделируем, как торговля между членами общества (честная и нечестная) перераспределяет богатство внутри него.

Пусть наша модель общества состоит из 10000 граждан. Конечно, чем больше граждан в обществе, тем лучше для модели, но увеличение размеров общества, например, до 100000 увеличило бы время вычислений одной задачи на компьютере автора до 2 часов и сделало бы написание статьи весьма проблематичным. С другой стороны, если бы результаты моделирования зависели от размеров общества в диапазоне от 10000 до 100000, то эту зависимость можно было бы увидеть при увеличении численности от 1000 до 10000, но такой зависимости обнаружено не было. Таким образом, 10000 человек выглядят вполне разумной и удобной величиной для моделирования.

Чтобы начать торговаться (продавать и покупать), члены общества должны иметь какой-то стартовый капитал и общие правила торговли. Поэтому раздадим всем гражданам по состоянию, эквивалентному 100 рублям, и введем следующие правила торговли:

А) раз в день каждого гражданина оповещают о том, с кем ему сегодня встречаться для торговли, этот список генерируется компьютером и является случайным;

Б) когда происходит запланированная встреча продавца и покупателя, компьютер случайным образом определяет того, кто получает выгоду от торговли, и ее размер; соответственно, богатство неудачника уменьшается на ту же величину;

В) выгода от торговли может быть

- В1 – постоянной величиной, как например, в некоторых видах лотереи или случайных сбоях компьютера кассового аппарата,
- В2 – случайно определяемой долей богатства неудачника,
- В3 – случайно определяемой долей суммарного богатства участников сделки;

Г) в тех случаях когда государство собирает налог со всех, кто получил выгоду во время торговли, оно распределяет его поровну среди всех членов общества.

Владеющим навыками программирования будет несложно написать программу, которая «следила» бы за обществом, описанным выше, и за тем, как меняется благосостояние отдельных его граждан. Главное – это выбрать язык программирования, предназначенный для работы с большими массивами переменных. Иначе вы будете тратить часы для получения лишь одного распределения, и можете потерять интерес к данной проблеме. Все приведенные в статье данные были получены, используя программирование на языке IDL (версия 5.5), разработанном компанией Research Systems (www.ResearchSystems.com).

Рассмотрим сначала такой вид торговли (B1), когда каждый день продавец и покупатель случайно обманывают друг друга, ничего не подозревая об этом. Это может происходить, например, из-за неисправного кассового аппарата, который, печатая чек, случайно уменьшает или увеличивает цену на 1 рубль. Назовем такое общество «B1», всем его членам дадим по 100 рублей и включим компьютер.

Следим за движением денег в обществе «B1». На рисунке 113 показано распределение богатств среди 10000 членов общества «B1» на следующий день после начала торговли; здесь по оси ординат отложено количество членов общества, обладающих богатством, обозначенным по оси абсцисс в рублях.

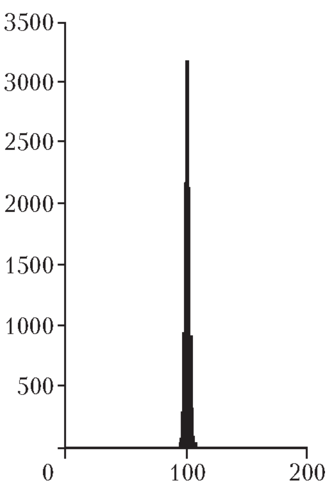

Рис.113. Распределение денег в обществе «B1» на следующий день после начала торговли с использованием сломанного кассового аппарата

Видно, что несколько тысяч членов общества увеличили или уменьшили свое состояние на один, два или даже три рубля. Приблизительно треть всех членов общества, похоже, вообще не участвовали в торговле, так как в случайной выборке компьютера их номеров не оказалось, а другим пришлось поторговаться с соседями по обществу два или даже три раза. Однако следующие случайные выборки, очевидно, скомпенсируют этот «недочет», и, скажем, за год все члены общества сходят на импровизированный рынок по 364–365 раз.

На рисунке 114 показано, как изменилось распределение богатства через 100 дней (или приблизительно через 3 месяца) пользования испорченным кассовым аппаратом. Общество «В1» слегка расслоилось, и богатство нескольких самых удачливых его членов (150 рублей) уже в три раза превышает состояние его самых бедных граждан (50 рублей). Заметим, однако, что пик графика, или гистограммы, как и на рисунке 113, находится на отметке 100 рублей, график по-прежнему остался симметричным и лишь расползся по ширине и, соответственно, уменьшился по высоте. Иными словами, 100 рублей и через 3 месяца остались наиболее вероятной величиной состояния в обществе, а количество обедневших (площадь гистограммы слева от 100 рублей) по-прежнему равно количеству обогатившихся (площадь гистограммы справа от 100 рублей).

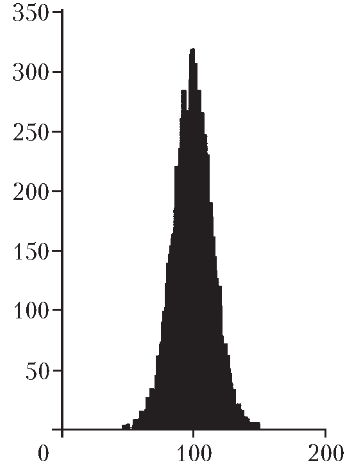

Рис.114. Распределение денег в обществе «В1» через 100 дней после начала торговли с использованием сломанного кассового аппарата

В обществе «В1» появляются нищие. Гистограмма, иллюстрирующая распределение состояний в обществе «В1» через 3 года торговли (1000 дней) с неисправным кассовым аппаратом, показана на рисунке 115. Как видно, за это время расслоение в обществе стало еще более заметным, и в нем даже появились граждане (их около 15), не имеющие никаких средств. Однако они могут принимать участие в актах торговли, надеясь на ошибку кассового аппарата и зачисление на их счет 1 рубля. Но по-прежнему наиболее вероятным состоянием члена общества «В1» остается богатство в 100 рублей, и соответствующий график выглядит таким же симметричным.

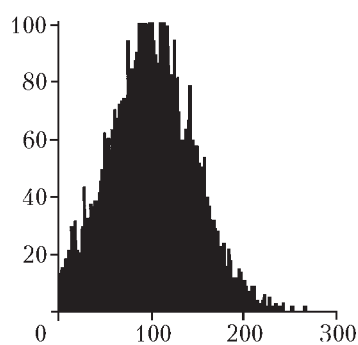

Рис.115. Распределение денег в обществе «В1» через 1000 дней

Со временем количество полностью разоренных продолжает

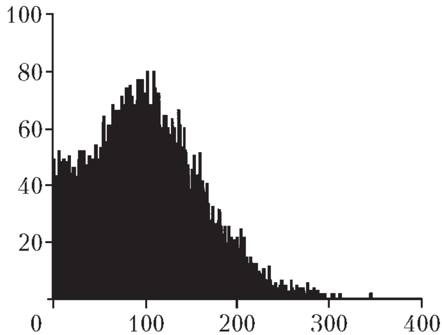

Рис.116. Распределение денег в обществе «В1» через 2000 дней

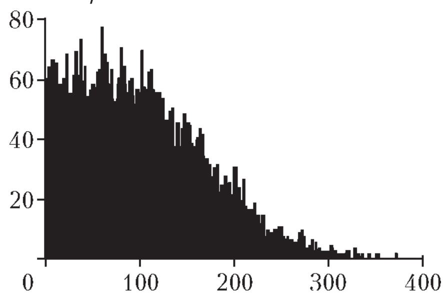

Рис.117. Распределение денег в обществе «В1» через 3000 дней

увеличиваться, и через 2000 дней (или через 5,5 лет) после начала жизни общества «В1» оно уже составляет более 40 человек (рис.116). Однако гистограмма все еще имеет различимый пик на отметке 100 рублей.

Через 3000 дней, как показывает гистограмма на рисунке 117, количество полностью разоренных членов общества «В1» уже близко к 60, а распределение не имеет отчетливого максимума. Кроме того, гистограмма уже не выглядит симметричной и представляет собой монотонно убывающую функцию.

Прошло 55 лет. Ну а теперь попросим компьютер построить распределение богатств в обществе «В1» через 20000 дней (или 55 лет) после начала торговли с использованием сломанных кассовых аппаратов (рис.118). Отметим сначала, что это распределение практически не отличается от распределений, полученных после 5000 или 10000 дней. Поэтому можно утверждать, что распределения, соответствующее 100000 дням или даже одному миллиону дней, тоже не будут отличаться от показанной на рисунке 118 гистограммы.

Таким образом, торговые отношения в обществе, где кассовые аппараты барахлят, приводят к такому перераспределению богатств в нем, что гистограмма становится похожей на экспоненту (см. белую кривую на рисунке 118). Заметим, что стремление общества к экспоненциальному распределению доходов не зависит от начальных условий. Автор моделировал жизнь таких торговых обществ при самых различных начальных ситуациях и правилах торговли, а именно:

• при равномерном распределении богатств перед началом торговли, т.е. когда доля людей, имеющих богатство x, не зависит от его величины;

- при искусственном делении всего общества перед началом торговли на несколько подобществ, внутри которых доходы одинаковы;
- при ситуации В2, когда выигрыш может составлять случайную долю состояний граждан;
- при вмешательстве государства, когда оно облагает налогом все торговые прибыли.

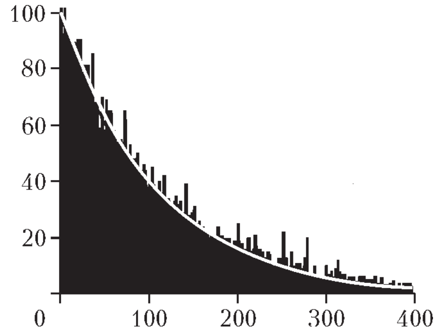

Рис.118. Распределение денег в обществе «В1» через 20000 дней после начала торговли с использованием сломанного кассового аппарата. Белая линия соответствует экспоненциальной кривой

Перед тем как пытаться объяснить это стремление к экспоненте, посмотрим еще раз на рисунки 113–118. Видно, что в течение первой тысячи дней случайный обмен рублями между гражданами приводит к расплыванию (размыванию) первоначального пика распределения, но его максимум остается на прежнем месте. Однако уже после 2000 дней распределение богатств своим левым (нищим) краем наталкивается на вертикальную ось, к которой начинают «прилипать» точки. В результате количество людей с малым состоянием начинает непропорционально расти, и распределение становится экспоненциальным. Попробуем доказать этот факт теоретически.

Для тех, кому хочется вывести «общественную» формулу распределения Больцмана. Через t дней жизни общества разобьем всех граждан на группы в соответствии с количеством денег, которыми они обладают. Группу «0» составят неудачники, которые в данный момент игры оказались разоренными и вообще не имеют никаких денег. В группу «1» отнесем всех тех, у кого есть только по одному рублю, в группу «2» – тех, кто обладает только двумя рублями, и т.д. Обозначим $P(m,t)$ количество граждан, принадлежащих после t дней к группе m, т.е. обладающих m рублями.

Попробуем описать, как должна измениться величина $P(m,t)$ за один прошедший день, а потом найдем уравнение для предельной функции – функции, к которой стремится $P(m,t)$ при увеличении числа дней t. Разделив $P(m,t)$ на общее количество граждан N, получим относительную долю этих граждан, или вероятность $p(m,t)$ найти среди граждан тех, кто имеет ровно m рублей через t дней торговли. После следующего, $(t + 1)$-го, дня $p(m,t)$ может измениться, так как некоторые граждане группы «m» могут:

- одарить других граждан одним рублем и соответственно перейти в группу «$m - 1$» (1);
- получить в подарок от других один рубль и соответственно перейти в группу «$m + 1$» (2).

Кроме того, члены соседних групп через один день могут стать членами группы «m», если:

- члены группы «$m - 1$» увеличат свое состояние на 1 рубль(3);
- члены группы «$m + 1$» уменьшат его на столько же (4).

Очевидно, что в случаях (1) и (2) численность группы «m» уменьшается, а в случаях (3) и (4) – увеличивается. Легко догадаться, что механизмы (1) и (3) перестают действовать для тех, кто окончательно разорен (группа «0»). Это и служит причиной «прилипания» точек к вертикальной оси, на что мы обратили внимание, рассматривая результаты моделирования, полученные с помощью ЭВМ.

Из теории вероятностей следует, что для граждан группы «m» вероятность получить один рубль в подарок от граждан группы «k» ($k > 0$) равна произведению вероятностей $p(m,t)$ и $p(k,t)$. Поэтому изменение $p(m,t)$, происходящее в силу причины (2), можно записать в виде

$$d_2 p(m,t) = -p(m,t)\sum_{1}^{\infty} p(k,t) .$$

Те же соображения позволяют записать изменение $p(m,t)$, происходящее в силу причины (1), как

$$d_1 p(m,t) = -p(m,t)\sum_{0}^{\infty} p(k,t) .$$

Отметим, что $d_2 p(m,t)$ отличается от $d_1 p(m,t)$ только одним слагаемым, так как рубль в подарок нельзя получить от членов группы «0».

Аналогичные допущения дают возможность вычислить $d_3 p(m,t)$ и $d_4 p(m,t)$:

$$d_3 p(m,t) = p(m-1,t)\sum_{1}^{\infty} p(k,t) ,$$

$$d_4 p(m,t) = p(m+1,t)\sum_{0}^{\infty} p(k,t) .$$

Суммируя все четыре изменения вероятности $p(m,t)$, а также учитывая, что

$$\sum_{0}^{\infty} p(k,t) = 1 \text{ и } \sum_{1}^{\infty} p(k,t) = 1 - p(0,t),$$

получаем следующее выражение:

$$p(m,t+1) - p(m,t) =$$
$$= \big(p(m+1,t) - p(m,t)\big) - \big(p(m,t) - p(m-1,t)\big) +$$
$$+ p(0,t)\big(p(m,t) - p(m-1,t)\big).$$

Моделирование на ЭВМ показывает, что со временем распределение $p(m,t)$ стремится к своей предельной функции $p(m,\infty)$. Эта функция не зависит от начальных условий, а зависит только от количества граждан и суммы розданных им денег. Когда $p(m,t)$ будет приближаться к своему пределу, она будет очень мало изменяться со временем, поэтому левую часть последнего равенства можно приравнять к нулю, что дает следующее уравнение для нахождения $p(m,\infty)$:

$$\big(p(m+1,\infty) - p(m,\infty)\big) - \big(p(m,\infty) - p(m-1,\infty)\big) +$$
$$+ p(0,\infty)\big(p(m,\infty) - p(m-1,\infty)\big) = 0.$$

Это уравнение имеет такое решение:

$$p(m,\infty) = \frac{1}{M} e^{-\frac{m}{M}},$$

где M – средняя величина состояния в обществе.

«Температура» обществ до и после их слияния. Итак, мы показали, что в обществе, где торговые сделки между гражданами сопровождаются случайным выигрышем в 1 рубль для одного и таким же проигрышем для другого, распределение граждан по их состоянию всегда стремится к экспоненциальному и не зависит от того, каким оно было вначале. Другими словами, одни обязательно теряют деньги во время таких торговых операций, ну а другие, соответственно, богатеют. Сравнение распределения Больцмана с последней формулой показывает, что роль «температуры» в распределении состояний в обществе играет средняя величина состояния M. Поэтому чем выше будет средний достаток в обществе, тем большая часть людей в нем будет иметь состояние больше чем m.

А теперь допустим, что два общества «В1», в каждом из которых доходы распределены в соответствии с полученной формулой, объединились (как это произошло, например, с Западной и Восточной Германиями в 1990 году или как это происходит со странами Европейского Союза сейчас). Очевидно, что через некоторое время сломанные кассовые аппараты сделают свое «черное» дело, в новом обществе установится равновесие и распределение состояний его граждан опять станет экспоненциальным. Нетрудно догадаться, что величина M, равная среднему состоянию граждан нового общества, или его «температуре», будет равна

$$M = \frac{M_1 N_1 + M_2 N_2}{N_1 + N_2},$$

где M_1, M_2 и N_1, N_2 – средний достаток и число граждан в первом и втором обществах соответственно до их объединения. Видно, что величина M лежит где-то между M_1 и M_2, а близость ее к последней зависит от отношения N_1/N_2.

Посмотрим теперь на последнюю формулу с позиций термодинамики, где граждане общества эквивалентны сталкивающимся молекулам газа. Тогда M можно заменить на kT, а N в термодинамическом варианте будет соответствовать плотности «молекул-граждан», и новая формула примет вид

$$(N_1 + N_2)kT = N_1 kT_1 + N_2 kT_2.$$

Так как NkT численно равно давлению идеального газа, то правая часть этой формулы это сумма «парциальных давлений» обществ 1 и 2 до их объединения, а левая – «давление» суммарного общества после того как процесс объединения завершился. Отметим, что, поскольку суммарное богатство (в термодинамике – энергия) общества сохраняется, то процесс объединения двух «газовых» обществ следует считать адиабатическим. Таким образом, слияние двух обществ с различными средними достатками аналогичен, с термодинамической точки зрения, адиабатическому процессу слияния двух газов, имеющих разные температуры.

Равновероятность обогащения и разорения. Стабильность общества. Известно, что шары при упругом столкновении обмениваются энергиями, хотя их суммарная энергия и импульс остаются постоянными. При этом, вообще говоря, нет каких-либо ограничений на величину энергии, передаваемой при столкновении. Например, теоретически при столкновении с покоящимся шаром вся энергия переходит к нему, а ранее двигавшийся шар останавливается. В остальных случаях доля суммарной энергии, меняющая хозяина, может составлять от 0 до 100% и очень сложным образом зависит от геометрических характеристик столкновения и принятых допущений. Так или иначе, мы вправе считать, что и при столкновении молекул газа между собой нет каких-либо ограничений на величину энергии, случайно переходящей от одной молекулы к другой. Другими словами, процесс обмена энергиями между молекулами можно считать симметричным – уменьшение энергии при столкновении так же вероятно, как и ее увеличение. Именно равновероятность получить и потерять энергию при столкновении приводит к тому, что энергия среди молекул газа распределяется по закону Больцмана.

То же самое относится и к обществу, где граждане, сталкиваясь друг с другом, теряют часть своего или приобретают случайную долю чужого состояния.

Хотели, как лучше... Очевидно, что практически невозможно поставить эксперимент над газом, ограничивая обмен энергиями между его молекулами. С людьми проще – достаточно издать закон. Ну скажем, попросим всех соблюдать закон «для защиты от недобросовестных торговцев», сокращенно ЗНТ. В соответствии с этим законом, выгода от торговой сделки между двумя людьми не должна превышать минимального состояния двух торгующих до сделки (см. общество «В2»). Иными словами, если встречаются торговцы с состояниями 50 и 150 рублей, то выигрышем одного и проигрышем другого может быть сумма, не превышающая 50 рублей. Казалось бы, закон ЗНТ – вполне разумный закон, защищающий бедняка от полного разорения. К сожалению, этот закон, как и многие другие законы, сотворенные людьми, приводит к противоположному результату. И вот почему.

Закон ЗНТ нарушает симметрию вероятностного обогащения, и если кто-нибудь случайно лишился большой части своего состояния, то ему уже очень тяжело будет выбраться, так как закон ограничивает его возможный выигрыш величиной его же состояния. А если ты полностью разорен, то в соответствии с этим же законом тебе уже не на что рассчитывать. Одним словом, закон ЗНТ приводит к прогрессирующему расслоению общества.

На рисунке 119 показано, как происходит расслоение общества «В2» со временем, отложенным по оси абсцисс в днях, после начала действия закона ЗНТ. Жирная кривая на верхнем рисунке показывает, как постепенно увеличивается количество граждан (в процентах к общему их числу), у которых состояние уменьшилось по сравнению с первоначальным. Тонкая кривая на том же рисунке иллюстрирует, как падает со временем относительное число разбогатевших граждан общества «В2». Нижний

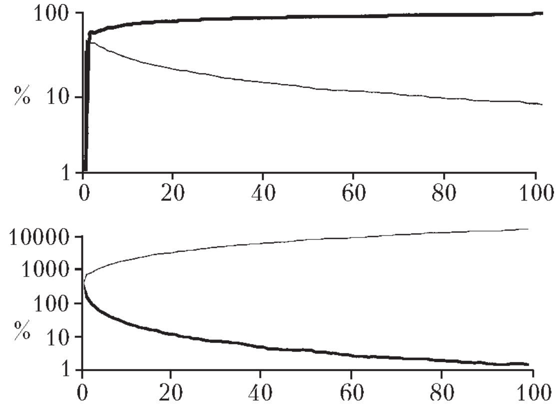

Рис.119. Расслоение общества «В2» со временем, отложенным по оси абсцисс в днях после начала действия закона ЗНТ. Жирная кривая относится к беднеющим гражданам, а тонкая кривая – к богатеющим гражданам

рисунок показывает, что со временем среднее состояние разорившихся граждан общества «В2» уменьшается (жирная кривая), а разбогатевших – растет (тонкая кривая).

Видно, что уже через 10 дней после действия закона ЗНТ 73% граждан (а их всего 10000) уменьшили свое состояние по сравнению с первоначальным в среднем на 85%, и все вместе они обладают лишь 11% богатства общества. В то же время остальные 27% граждан разбогатели так, что их суммарное состояние составляет 89% богатства общества. Через 100 дней действия закона расслоение становится еще более заметным, и разоренными оказываются уже 93% граждан, которые все вместе обладают менее чем 2% общенародного достояния, в то время как 7% богачей обладают остальными 98% всех богатств. Таким образом, закон ЗНТ приводит к прогрессивному росту числа полностью разоренных граждан и образованию нескольких олигархов, у которых находятся все богатства общества.

Очевидно, что общество, возникшее в результате действия закона ЗНТ, оказалось нежизнеспособным. Кроме того, как это иллюстрирует рисунок 119, равновесное состояние в таком обществе никогда не наступает, поскольку количество неимущих членов общества постоянно растет, а уменьшающееся число имущих становится недостаточным для статистического равновесия. Отметим, что в отсутствие закона ЗНТ, как показало моделирование общества «В1», граждане, принадлежащие груп-