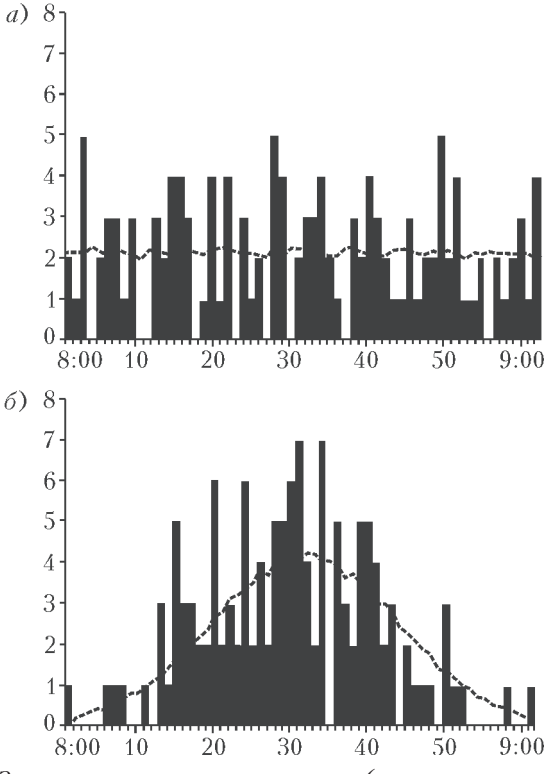

Рис.108. Зависимость количества жильцов (вертикальная ось), выходящих на лифтовые площадки 17-этажного дома каждую минуту, от времени между 8:00 и 9:00 утра (горизонтальная ось, в минутах). Черные столбцы – пример для одного из 365 дней года, пунктирная кривая – усредненное по 365 дням значение. Время выхода жильцов на лифтовые площадки задавалось генератором случайных чисел компьютера, предполагая их равномерное распределение (а) или нормальное распределение (б). С каждого этажа в течение этого часа лифт вызывают 8 человек

Итак, эксплуатация лифтов началась. Для простоты будем считать, что первый этаж имеет номер 0, второй – номер 1 и т.д. (Кстати, такая нумерация принята в некоторых странах Европы и Северной Америки, где первый этаж в нашем понимании называют «земляным».) Тогда очевидно, что ВОЛ человеком, который самым первым вышел из своей квартиры в подъезде, равно отношению номера этажа F, где расположена его квартира, к скорости движения лифта v. Если за время ожидания

лифта на лестничную площадку выйдет еще кто-нибудь, то ему (или ей) повезет, так как соответствующее ВОЛ будет меньше, чем у человека, уже вызвавшего лифт. На посадку уходит T секунд, после чего лифт начинает движение вниз. Приближаясь к каждому этажу, компьютер лифта проверяет, есть или нет вызова с данного этажа, и если есть, то останавливается, открывает и закрывает двери, после чего продолжает движение. Достигнув уровня нулевого этажа, все пассажиры лифта выходят, а наш компьютер заносит в память, сколько он проехал этажей, какое потратил время и какова была загрузка во время данного рейса. Кроме этого, для каждого из исполненных вызовов программа вычисляет ВОЛ, хранит в памяти информацию о том, одна или обе кнопки были нажаты, а также с какого этажа был сделан вызов. После этого лифт готов подняться по очередному вызову, и так происходит, пока все вызовы, поступившие в течение часа, не будут исполнены.

Для того чтобы сделать результаты такого моделирования более достоверными, попросим компьютер проследить за этим часом работы двух лифтов в течение 365 дней, каждый раз случайным образом задавая последовательность выхода людей из своих квартир, а полученные данные усреднить.

Жмем только одну кнопку и рассуждаем об очереди. Сначала посмотрим, сколько времени (в среднем) люди ждут прихода лифта. Как показало моделирование, если жильцы 17-этажного дома вызывают только один из двух лифтов и их выбор равновероятен, то средняя величина ВОЛ составляет 59 и 180 секунд для распределений, изображенных на рисунке 108,*а* и 108,*б* соответственно. Очевидно, что трехкратное увеличение ВОЛ при «нормальном» распределении моментов выхода людей к лифту вызвано более чем двукратным увеличением числа людей, вызывающих лифт в минуты, близкие к середине часа, по сравнению с «равномерным» распределением. Отметим, что даже при «равномерном» распределении, когда каждую минуту в среднем 2,1 человека вызывают лифт, почти всегда существует очередь, состоящая из нескольких вызовов. Заметим, что здесь речь идет об очереди вызовов лифта, хранящейся в его компьютере, а не о группах людей, ожидающих вместе на одной лестничной площадке прихода лифта.

Если бы очереди не существовало, а количество этажей в доме было N, то, как легко подсчитать, среднее ВОЛ достигло бы своего минимума и составило

$$\min(\text{ВОЛ}) = \frac{N}{2v}. \qquad (1)$$

Для 17-этажного дома $\min(\text{ВОЛ}) = 17$ с (а не 59 с, как на самом деле). Возникновение очереди связано с тем, что среднее время обслуживания одного пассажира, равное $2\min(\text{ВОЛ}) + 2T = 54$ с, почти в два раза превышает среднее время между вызовами лифта (28 с). Существование двух лифтов не спасает положения, так как, нажимая на кнопку, мы не знаем, свободен лифт или нет. Очевидно, что с ростом этажности дома увеличивается и очередь ожидающих вызовов, а вместе с ней – и среднее ВОЛ, если количество жильцов на этаже и характеристики лифта остаются прежними.

Вот как выглядит зависимость времени ожидания лифта от этажности дома при вызове одного из двух лифтов (моменты выхода в лифтовый холл имеют равномерное распределение):

Количество этажей	8	13	17	21
Среднее время ожидания,с	13	29	59	197

Как и следовало ожидать, ВОЛ растет от 13 с для 8-этажного дома до 197 с в 21-этажном доме.

В отсутствие очереди ВОЛ должно линейно зависеть от номера этажа F, с которого делается вызов, так как лифт всегда приходит с этажа «0» и затрачивает на это F/v секунд. Однако реальная зависимость ВОЛ от номера этажа далека от линейной. На рисунке 109 приведены данные компьютерного моделирования, показывающие, что для всех этажей реальная кривая лежит гораздо выше той, которая соответствует отсутствию очереди. Бросается в глаза непропорциональное увеличение ВОЛ для верхних этажей дома – оно достигает почти трех минут для этажа «16». Все это говорит о том, что от очереди лифтовых вызовов страдают жильцы всех этажей, но особенно те, кто живет наверху.

Посмотрим, как будет зависеть ВОЛ от номера этажа в дождливый воскресный день, когда большинство жильцов предпочтут остаться дома и только 25% выйдут из дома. Очевидно, что в этом случае очередь из вызовов должна значительно укоротиться, а зависимость ВОЛ от номера этажа – приблизиться к линейной. Как показало компьютерное моделирование, «воскресная» зависимость (нижняя кривая на рисунке 109) действительно очень близка к зависимости минимального ВОЛ от номера этажа, проходя выше лишь на несколько секунд. Таким образом, даже если в течение часа один из двух лифтов вызывают только 32 человека, их вызовы, тем не менее, могут накладываться друг на друга, образуя очередь, и в результате

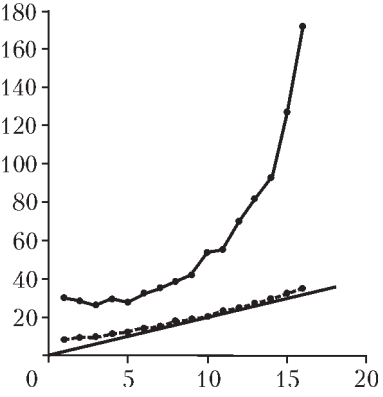

Рис.109. Зависимость среднего времени ожидания лифта (вертикальная ось, в секундах) от номера этажа (горизонтальная ось) с которого был сделан вызов. Данные получены с помощью компьютерного моделирования и усреднения по 365 дням для 17-этажного дома, предполагая равномерное распределение моментов появления жильцов на лифтовых площадках и вызов ими одного из двух лифтов. Верхняя кривая соответствует случаю, когда количество жильцов, вызывающих лифт с каждого этажа, равно 8, более нижняя кривая – то же, но когда количество жильцов, вызывающих лифт с каждого этажа, уменьшается с 8 до 2 человек. Прямая линия – это минимально возможное время ожидания лифта, соответствующее отсутствию очереди

среднее (за 365 воскресений) ВОЛ становится слегка выше его минимального значения.

Почему наверху приходится дольше ждать лифт. Как иллюстрирует верхняя кривая на рисунке 109, жители верхних этажей нашего дома могут раз в пять дольше ждать лифта, чем жители первых 8–10 этажей. И дело здесь, конечно, не в том, что лифт дольше идет до верхних этажей, чем до нижних, – эта «кинематическая» разница составляет не более 30 секунд. Откуда же берутся еще 110 секунд задержки в обслуживании жильцов верхних этажей? Ответ тот же – очередь. Оказывается, очередь для вызовов, поступивших с верхних этажей, всегда длиннее. И вот почему.

Очевидно, что для «равномерного» распределения вероятность того, что нажавший кнопку вызова через время F/v увидит перед собой открывающиеся дверцы лифта, не зависит от номера этажа F, а равна отношению времени, которое лифт проводит на этаже «0» в ожидании вызовов, к суммарному времени его работы, т.е. к 3600 секундам. Однако сесть в лифт можно не только в тот, который сам вызвал, но и в опускающийся сверху и проходящий мимо твоего этажа. Здесь-то и становится заметным преимущество тех, кто живет в нижних этажах, – они садятся в лифты, соответствующие более ранним заказам, но сделанным жильцами более высоких этажей. Возможность сесть в проходящий лифт укорачивает очередь лифтового компьютера, но «усиливает» несправедливость для жителей верхних этажей – их вызовы продолжают накапливать-

ся в его памяти. Это и является причиной непропорционально большого роста ВОЛ для тех, кто живет близко к крыше, объясняя зависимость, полученную при моделировании (см. верхнюю кривую на рисунке 109).

Попробуем вызывать сразу оба лифта. Ну а теперь попросим всех жильцов нажимать обе кнопки вызова лифта. Как и предполагалось, компьютерное моделирование показывает, что вызов одновременно двух лифтов не ускорит приход на работу или учебу жильцов нашего 17-этажного дома, а среднее ВОЛ при этом увеличится с 59 до 70 секунд. «Ну и что? А вдруг это ошибка программы?» – скажет читатель. Действительно, трудно поверить, что, вызывая оба лифта, мы делаем себе хуже. Но отметим, что выигрыш от нажатия обеих кнопок исчезает только в том случае, когда ВСЕ нажимают обе кнопки. Когда же процент жильцов, вызывающих сразу оба лифта, невысок (от 1 до 5%), то эти жильцы почти в два раза меньше, чем остальные, ждут прихода лифта – см. нижнюю кривую на рисунке 110. Посмотрите теперь на верхнюю кривую на этом рисунке – она показывает, как страдают от того, что кто-то вызывает сразу два лифта, те, кто по-прежнему нажимают только одну кнопку. Видно, что выигрыш тех немногих, кто нажимает обе кнопки, происходит за счет замедления обслуживания всех остальных жильцов дома.

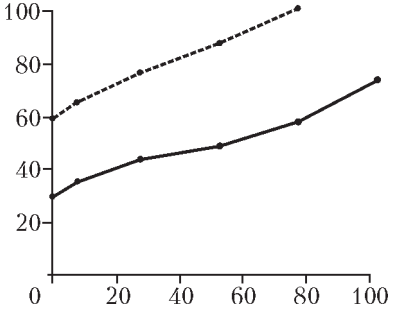

Рис.110. Зависимость времени ожидания лифта (вертикальная ось, в секундах) от доли жильцов (горизонтальная ось, в %), вызывающих сразу оба лифта. Верхняя кривая – для тех, кто вызывает только один лифт, нижняя – для вызывающих оба лифта

Из рисунка 110 видно, что когда 80% жильцов жмут на обе кнопки, они уже ничего не выигрывают по сравнению с тем случаем, когда все вызывают только один какой-нибудь лифт. Почему же с ростом числа людей, вызывающих оба лифта, их обслуживание может замедляться? Ответ очень прост. Нажимая обе кнопки, мы искусственно увеличиваем длину очереди для жильцов, выходящих к лифтовым холлам позже нас. А если кто-то нажал обе кнопки на другом этаже до того, как это сделали мы, то длина очереди увеличивается и для нас.

Однако такая несправедливость при нажатии обеих кнопок – когда одни лезут без очереди, а вторые страдают от этого – исчезает, если очереди на обслуживание нет, т.е. при относительно редком появлении жильцов на лестничных площадках. Например, если, спускаясь вниз поздно вечером, все подписчики вечерних газет (25% всех жильцов) будут нажимать на обе кнопки, то они в среднем будут ждать лифта только 13 секунд, по сравнению с 19 секундами в случае вызова одного лифта. По той же причине в выигрыше от одновременного нажатия двух кнопок будут и жители малоэтажных домов. Моделирование показало, что наибольший выигрыш от нажатия двух кнопок в этих случаях получают жители верхних этажей. Рисунок 111 демонстрирует, что для вызовов с этажа «16» нажатие двух кнопок позволяет сократить ВОЛ с 35 до 24 секунд. В то же время, одновременный вызов двух лифтов с первых четырех этажей практически не дает никакого выигрыша по сравнению с вызовом одного из них. Более того, среднее значение ВОЛ для этажа «16» становится на 8 секунд меньше, казалось бы, минимальной величины ВОЛ, равной $F/v = 32$ с. Неужели компьютерная программа нас водит за нос? Нет! Просто формула для минимального значения ВОЛ была нами выведена для вызова одного лифта, а для вызова обоих она несправедлива. И вот почему.

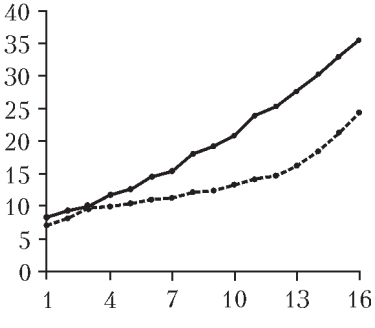

Рис.111. Зависимость времени ожидания лифта (вертикальная ось, в секундах) от номера этажа (горизонтальная ось), с которого сделан вызов, для «подписчиков вечерних газет», когда количество вызовов в час с каждого этажа сокращается с 8 до 2. Верхняя (более крутая) кривая – при вызове одного из двух лифтов, нижняя – при одновременном вызове обоих лифтов

При нажатии каждым только одной кнопки лифт на последний этаж может прийти только с этажа «0». Если все нажимают по две кнопки, то где-то ниже этажа «16» обязательно возникнет ситуация, когда пустой лифт придет по вызову, а пассажира, сделавшего вызов, уже не будет, так как он уехал на прибывшем ранее другом лифте. В этом случае лифт останется на данном этаже ждать следующего вызова, и если он будет с этажа «16», то ВОЛ будет ниже $16/v$, так как лифту потребуется меньше

времени, чтобы добраться до этажа «16». Поэтому по воскресеньям нажатие двух кнопок и дает больше преимуществ жильцам верхних этажей.

Но за воскресеньем всегда приходят будни, а с ними – и очереди лифтовых вызовов. Вот как выглядит зависимость ВОЛ при нажатии обеих кнопок от этажности дома:

Количество этажей	8	13	17	21
Среднее время ожидания при вызове обоих лифтов, с	7	22	70	336
Среднее время ожидания при вызове одного из двух лифтов, с	13	29	59	197

Если верить результатам компьютерного моделирования, приведенным в этой таблице, то жильцам многоэтажных домов с количеством этажей 17 и выше не выгодно вызывать два лифта сразу, так как среднее ВОЛ при этом возрастает по сравнению с нажатием только одной кнопки.

Этот результат уже не кажется удивительным, так как несколько раньше мы с читателем пришли к заключению, что вызов обоих лифтов ускоряет обслуживание только тогда, когда средний интервал между выходом жильцов из своих квартир (СИВ) превышает среднее время их обслуживания лифтом (СВО). Для восьмиэтажного дома СИВ равен 64 с, а СВО можно вычислить, прибавив к двум минимальным ВОЛ удвоенное время открывания-закрывания дверей, что дает 36 с. Значительное превышение СИВ над СВО не дает возникнуть очереди в 8-этажном доме и делает выгодным нажатие сразу двух кнопок. В 17-этажном доме СИВ равен 28 с, составляя только половину величины СВО (54 с), что и служит причиной возникновения длинных очередей, делая одновременный вызов обоих лифтов невыгодным.

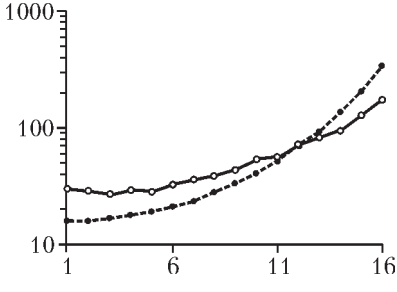

Рис.112. Зависимость времени ожидания лифта (вертикальная ось, в секундах) от номера этажа (горизонтальная ось), с которого он вызван. Верхняя (более пологая) кривая – все жильцы вызывают один из двух лифтов, нижняя – все вызывают оба лифта

Жильцам верхних этажей опять не везет. Мы уже знаем, что жильцы верхних

этажей вынуждены простаивать в ожидании лифта гораздо дольше, даже если все в подъезде вызывают только один из двух лифтов. Не везет им и в том случае, когда все жмут две кнопки. Как зависит ВОЛ от номера этажа в 17-этажном доме, показано на рисунке 112. Видно, что одновременный вызов двух лифтов позволяет жильцам нижних этажей (вплоть до «11») уменьшить ВОЛ, однако, начиная с этажа «13» то же дает противоположный результат, а для жильцов этажа «16» нажатие двух кнопок приводит к увеличению ВОЛ почти в два раза.

Причиной такой несправедливости по отношению к жителям верхних этажей является то же, что делало несправедливым наше «лифтовое» общество, когда все вызывали только один из двух лифтов, т.е. очередь. Для многих вызовов с нижних этажей она отсутствует или очень невелика, так как можно «пройти без очереди», воспользовавшись проходящим мимо лифтом. Жильцы сверху пройти без очереди не могут и вынуждены отстоять ее всю. Поэтому, когда все начинают давить сразу на обе кнопки, больше всего страдают те, кто сверху.

Подведем итоги. Компьютерное моделирование эксплуатации лифта в 17-этажном доме, где на каждом этаже 8 человек, чтобы спуститься вниз, вызывают лифт в течение часа, убедило нас, что вызывать сразу два лифта выгодно, если это делает небольшая группа людей (1–5%). При этом выигрыш во времени ожидания лифта у этой маленькой группы достигается за счет замедления обслуживания остальных жильцов. Когда число вызывающих сразу два лифта вырастает до 50%, то их выигрыш уменьшается вдвое. Ну а если обе кнопки нажимают все, то время ожидания лифта даже увеличивается, и особенно для жителей верхних этажей. Таким образом, стратегия, приносящая выигрыш небольшой группе людей, перестает быть таковой, когда она охватывает все общество.

ГЛАВА 18

КИНЕТИКА СОЦИАЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА

Общество можно представить как пирамиду, на вершине которой находится его элита, состоящая из людей, обладающих властью и большими материальными ценностями, а нижние этажи отведены, как принято говорить, простым людям. Зависть многочисленных жителей нижних этажей к богатству тех немногих, кто оказался на самом верху, часто бывает трудно отличить от любви к справедливости. Так как элита общества расставаться со своими богатствами не собирается, то законное стремление простых людей жить лучше всегда наталкивается на сопротивление жителей верхних этажей этой пирамиды. Таким образом, пирамида нашего общества – вечный повод для революционной борьбы бедных с богатыми, а история человечества – история борьбы за социальное равенство.

Социологи, многим из которых чувство зависти тоже не было чуждо, не раз давали советы, как построить общество, где все были бы равны. Если искать геометрические аналогии, то «общество равных» можно было бы представить себе в виде диска очень большого диаметра с высокой башней в центре, из окон которой выглядывают несколько представителей из «равных», ответственных за поддержание равенства.

К сожалению, история показала, что теория построения «общества равных» не выдерживает испытание практикой хотя бы из-за того, что некоторые люди не хотят быть равными другим и таким своим поведением отвлекают непомерно большие материальные средства общества на поддержание равенства.

Не вдаваясь в дальнейшую полемику о том, каким должно быть современное общество, чтобы каждому в нем жилось хорошо, попытаемся лишь ответить на вопрос, почему торговые отношения между членами общества приводят к тому, что в руках меньшей части общества оказывается бóльшая часть его богатств. Но сначала посмотрим, какие существуют оценки социального неравенства.

Парето пересчитывает чужие богатства. Первым, кто описал математической формулой социальное неравенство, был итальянский экономист Вильфредо Парето. В 1896 году он публикует «Курс политической экономии», где собраны статис-

тические данные о распределении доходов в различных странах. Анализируя их, Парето приходит к заключению, что во все времена (с XVI по XIX в.) и во всех странах распределение доходов можно описать следующей формулой, которая с тех пор носит его имя:

$$\log N = \log a - b \log x ,$$

где N – число людей, имеющих доход больше x, а a и b – постоянные, характерные для данной страны и времени, при этом b составляет величину около 1,5.

Однако в 30-е годы прошлого века выяснилось, что Парето изучал статистику доходов только богатых и очень богатых людей того времени, в то время как статистика людей с малыми и средними доходами была просто никому не известна. Когда же стали анализировать распределение доходов «простых» людей, то оказалось, что эта зависимость очень близка к экспоненциальной, а соответствующая формула Парето принимает вид

$$N(x) = \frac{1}{M} e^{-\frac{x}{M}} dx ,$$

где $N(x)$ – относительная доля людей, обладающих состоянием (в денежном выражении) больше x, но меньше $x + dx$, а M – средний доход «простых» людей.

Только в конце 90-х годов прошлого века физики обратили внимание на то, что формула, описывающая распределение доходов в обществе, очень похожа на распределение Больцмана–Гиббса – Максвелла, которое позволяет оценить относительную долю f молекул газа, имеющего температуру T, механическая энергия которых находится в пределах $E \pm dE/2$:

$$f = \frac{e^{-\frac{E}{kT}}}{kT} dE ,$$

где k – постоянная Больцмана.

Что же общего между распределением механической энергии среди молекул газа и распределением доходов в обществе? Оказалось, что между этими, казалось бы, далекими друг от друга процессами действительно много общего. А именно, в обоих случаях соблюдаются законы сохранения. При столкновении двух молекул газа их общая механическая энергия не изменяется, а может лишь переходить от одной молекулы к другой. Аналогичный закон действует и при «столкновении» продавца и покупателя товаров или услуг. После совершения