

ными скобками обозначено абсолютное значение разности векторов, проведенных из начала координат к i -му человеку ($\overline{z_i}$) и к j -му человеку ($\overline{z_j}$), которое равно расстоянию между этими людьми. Так, в соответствии с записанной формулой, коснувшись друг друга люди противостоят отталкивающей силе в 2000 Н, которая при их взаимном отдалении уменьшается в e раз через каждые 8 см.

Как показывает житейский опыт, двигаясь, человек избегает касания не только с другими пешеходами, но и со стенами и прочими ограждениями. Для описания этой характеристики движения i -го человека введем отталкивающую силу, действующую на него со стороны ближайшего участка стены перпендикулярно ее поверхности, и обозначим ее $\overline{F_{cti}}$. Очевидно, что формула для значения абсолютной величины этой силы может иметь вид, аналогичный предыдущей формуле, а именно

$$F_{cti} = Ae^{-\frac{d_i - D/2}{B}},$$

где d_i – кратчайшее расстояние между i -м человеком и ближайшей стеной, A и B – те же, что и для силы F_{ij} .

Силы, «отталкивающие» человека от препятствий, описанные соответствующими формулами, помогают ему избегать столкновений, но не всегда. В тех случаях когда плотность людей и их «желаемая» скорость велики, сумма сил $\overline{F_{ij}}$ и $\overline{F_{cti}}$ не спасает их от столкновений. Кроме того, столкновению людей между собой и со стенами способствуют необходимые иногда повороты на пути к выходу. Поэтому для полного описания сил, действующих во время давки, необходимо ввести силы упругого взаимодействия и трения при столкновении людей между собой и людей со стенами.

Для простоты будем считать, что при столкновении людей между собой и со стеной их можно заменить вертикально стоящими цилиндрами с круговым поперечным сечением диаметром D . Очевидно, что столкновение таких цилиндров, моделирующих людей под номерами i и j , происходит тогда, когда расстояние между их осями становится меньше D . Величину силы упругого взаимодействия, отталкивающей их друг от друга, в соответствии с законом Гука можно описать формулой

$$F_{yij} = k \left(D - \left| \overline{z_i} - \overline{z_j} \right| \right),$$

где k – коэффициент, пропорциональный жесткости человека в поперечном направлении (120000 Н/м). Формула, аналогичная

этой, очевидно, справедлива и для столкновения i -го человека со стеной и имеет следующий вид:

$$F_{ycti} = k(D/2 - d_i),$$

где d_i – минимальное расстояние между осью i -го цилиндра и стеной в области их контакта.

Что касается силы трения $F_{\text{тp}i}$, действующей на i -го человека при столкновении с «чужой» поверхностью, то ее величина будет зависеть, во-первых, от того, с какой скоростью $v_{\text{п}i}$ он будет двигаться вдоль «чужой» поверхности, и, во-вторых, от величины деформации Δ при столкновении, которая заключена в скобки в двух последних формулах. Если эти величины известны, то сила трения при столкновении, действующая в сторону, противоположную скорости, равна

$$\overline{F_{\text{тp}i}} = -b\overline{v_{\text{п}i}}\Delta,$$

где b – коэффициент трения (120000 кг/(м·с)).

Таким образом, сила $\overline{F_{ci}}$, стоящая в правой части уравнения второго закона Ньютона, является суммой сил, описанных полученными выше формулами. При этом если i -й человек одновременно сталкивается с несколькими другими, то соответствующие выражения следует вычислять для всех столкнувшихся людей. Кроме того, для всех необходимо вычислять алгебраическую сумму сил, приложенных к каждому из них в радиальном направлении, так как известно, что если эта величина превысит 3000 Н, то человек может потерять сознание и стать жертвой паники. А всякий, кто теряет сознание в результате давки, перестает двигаться и поэтому становится дополнительным препятствием для толпы на ее пути.

Пора включать компьютер! Читатель уже наверняка устал от формул и коэффициентов, взятых, как он считает, с потолка. Автор частично разделяет такую оценку, обещая больше не испытывать терпение читателя. Искусство моделирования и заключается в том, чтобы вовремя остановиться. Кроме того, очевидно, что полностью описать в терминах физики и математики такие сложные процессы, как поведение человека, вообще невозможно. И все-таки попробуем предсказать движение толпы, используя полученные формулы, хотя наверняка такое описание является весьма приближенным.

Пусть в прямоугольном зале дискотеки размером 20 на 7 метров находятся N человек и в момент времени $t = 0$ внезапно происходит возгорание электроаппаратуры, стоящей в углу зала. В результате возникает паника, и все устремляются к

выходу. Чтобы начать моделировать движение толпы, нам необходимо задать начальные условия – положение людей и скорости их движения в момент времени $t = 0$. Поэтому с помощью компьютера распределим людей по залу так, как это показано на рисунке 91, и для простоты положим, что в момент времени $t = 0$ все люди стояли практически неподвижно и ждали, когда наконец включат музыку, т.е. $v_i = 0$ для $1 \leq i \leq N$. Ну, а теперь начнем писать программу, которая могла бы отслеживать движение каждого человека в толпе.

Программа должна, учитывая расположение и скорости людей в момент времени t , для каждого i -го человека вычислить сумму сил, стоящую в правой части уравнения второго закона Ньютона, а потом найти приращение $\overline{\Delta v_i}$, произошедшее за интервал времени Δt . После этого программа вычисляет новые значения $\overline{v_i}$, соответствующие моменту $t + \Delta t$, и передвигает i -го человека в направлении вектора $\overline{v_i} + \overline{\Delta v_i}$ на расстояние, равное $|\overline{v_i} + \overline{\Delta v_i}| \Delta t$. И все повторяется снова.

Очевидно, что чем меньше будет значение Δt , тем точнее будут наши расчеты. Однако одновременно с увеличением точности расчетов растет время, необходимое компьютеру для решения задачи. Следует заметить, что с какого-то значения Δt , назовем его критическим, дальнейшее его уменьшение уже приводит к едва заметным изменениям. Поэтому Δt берут, например, в два раза меньше критического значения, значительно экономя, таким образом, время для вычислений. Исходя из этих соображений, было выбрано $\Delta t = 0,002$ с, что позволило потратить около 40 минут для моделирования движения толпы, состоящей из 60–70 человек, в течение одной минуты. Как оказалось, одной минуты вполне хватило этой «толпе», чтобы покинуть в панике помещение, правда оставив за собой нескольких «сдавленных» вертикальных цилиндров. Чтобы упростить вычисления, предполагалось, что абсолютное значение «желаемой» скорости v_{0i} у всех людей из толпы одинаково, и поэтому

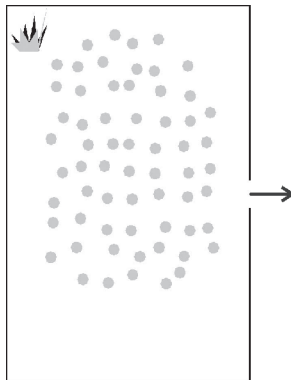


Рис. 91. Распределение людей в прямоугольной комнате размером 20×7 м в начальный момент времени $t = 0$ ($v_0 = 0$). Люди обозначены серыми кружочками диаметром 0,6 м. Стрелкой показан выход через дверь шириной $b = 1,5$ м

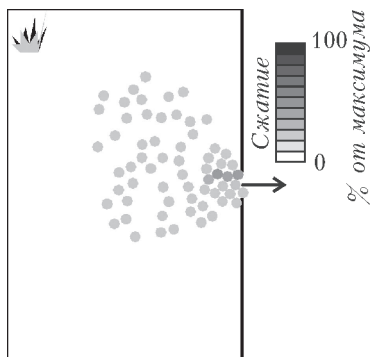


Рис. 92. Полученное в результате моделирования распределение людей в комнате через 4 с после начала паники ($v_0 = 1,1 \text{ м/с}$, $b = 1,5 \text{ м}$). Плотность закрашивания соответствует величине суммарной силы сжатия, приложенной к каждому человеку со стороны окружающих людей и стены, в соответствии со шкалой, показанной здесь же

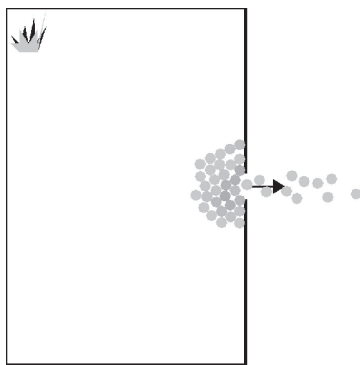


Рис. 93. Распределение людей в комнате через 22 с после начала паники ($v_0 = 1,1 \text{ м/с}$, $b = 1,5 \text{ м}$), когда почти половина из них уже вышли из помещения. Как видно, перед дверью образовалась группа людей, мешающих друг другу выйти (блок)

в дальнейшем оно обозначается как v_0 .

Посмотрим, что получится. Как показывают результаты моделирования (рис. 92), проходит совсем короткий промежуток времени t_1 , всего несколько секунд, до того момента, когда первый человек выскакивает из помещения, и это время, конечно, уменьшается с ростом панических настроений (при увеличении v_0). Например, для начальных условий, изображенных на рисунке 91, время t_1 уменьшается с 7 до 4 с при увеличении v_0 с 0,7 до 1,7 м/с соответственно. Так что для людей, оказавшихся вблизи выхода, подтвердилось известное правило: «чем больше паникуешь, тем быстрее убежишь от неприятностей». Отметим, однако, что несколько человек, следующих за счастливицами, оказались сжатыми друг другом, что показано на рисунке 92 более интенсивным закрашиванием соответствующих кружочков.

На рисунке 93 изображено положение людей в толпе в момент времени $t_{1/2}$, когда уже половина людей вышли из помещения. Видно, что к этому времени у дверей образовалась почти симметричная толпа, и поэтому человек, оказавшийся в проеме двери, испытывает сжатие с разных сторон.

В таблице 10 приведена зависимость времени выхода первого человека (t_1 , лев. верх),

Таблица 10

	Ширина двери $b = 1,1$ м		Ширина двери $b = 1,3$ м		Ширина двери $b = 1,5$ м		Ширина двери $b = 1,7$ м	
Паника, $v_0 = 0,7$ м/с	7	46	7	46	6	44	6	39
	50	нет	40	нет	29	нет	24	нет
Паника, $v_0 = 1,1$ м/с	5	75	5	86	4	79	4	78
	60	нет	32	нет	22	нет	18	нет
Паника, $v_0 = 1,5$ м/с	4	95	4	>100	4	99	3	93
	блок	нет	33	1	19	нет	15	нет
Паника, $v_0 = 1,7$ м/с	4	>100	4	>100	4	>100	3	>100
	блок	3	27	2	35	2	17	5

половины всех людей ($t_{1/2}$, лев. низ), максимальной силы сжатия у дверей в процентах к допустимой (прав. верх) и количества жертв (прав. низ) от уровня паники (величины скорости v_0) и ширины дверей для начальных условий, изображенных на рисунке 91. Из таблицы следует, что рост скорости v_0 дает очень малый выигрыш для большинства людей в толпе, особенно для маленьких дверей. Так, для двери шириной 1,3 м увеличение v_0 с 1,1 до 1,5 м/с вообще не приводит к уменьшению $t_{1/2}$. Кроме того, как иллюстрируют таблица 10 и рисунок 94, при панике и недостаточной ширине двери давление, сжимающее людей в центре толпы, часто достигает критического значения, после чего очередной «сдавленный» человек становится дополнительным препятствием для толпы, затрудняя ее движение. Поэтому для каждой группы людей, находящейся в данном помещении, существует некое значение v_0 , зависящее от ширины выходных дверей помещения, превышать которое не рекомендуется, если мы хотим избежать человеческой давки.

Как нетрудно догадаться, относительно малый эффект влияния увеличения v_0 на $t_{1/2}$ объясняется тем, что люди, сжимая друг друга, увеличивают силы трения между собой. В результате относительная доля усилий, затраченных на движение в сторону двери, уменьшается, а вместе с этим уменьшается и выигрыш от увеличения v_0 . В этом и заключается основное отличие между движением вязкой (но несжимаемой) жидкости через место сужения и движением толпы через дверь. В первом случае скорость потока жидкости прямо пропорциональна приложенно-

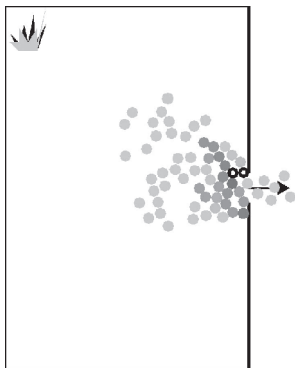


Рис. 94. Распределение людей в комнате через 4 с после начала паники ($v_0 = 1,7 \text{ м/с}$, $b = 1,7 \text{ м}$). Появились первые жертвы (изображены черными пузырьками), суммарная сила сжатия которых превысила допустимый максимум 3000 Н

му давлению. Толпа же по своим механическим свойствам близка к сжимаемой жидкости (например, жидкой резине), у которой вязкость (трение между соседними движущимися слоями) растет с ростом давления, и поэтому увеличение прикладываемого давления приводит к непропорционально меньшему росту скорости потока.

Как видно из таблицы 10, с ростом паники и сужением двери растет количество «сдавленных» людей, большая часть которых находится вблизи дверей. Это и неудивительно. Ведь у двери, находящейся в центре стены, сталкиваются, по крайней мере, три потока людей, стремящихся к выходу, — два вдоль стен и один перпендикулярный проему двери. В итоге давление на каждого человека, достигшего дверей, увеличивается, и если оно достигает критического значения,

то этот человек становится жертвой толпы.

На рисунке 95 показано, как изменяется максимальное давление (сжатие) в толпе по мере того как люди покидают помещение. Видно, что самых высоких значений давление достигает в первые секунды после возникновения паники, когда разогнавшиеся люди, расположенные близко к дверям, сталкиваются друг с другом. Потом, с уменьшением количества людей в толпе, давление постепенно падает, испытывая большие колебания, соответствующие образованию и разрушению «дуги» из людей, не желающих пропускать друг друга (см., например, рисунок 93). Поэтому росту сжатия соответствует временное прекращение выхода людей из помещения (интервалы между 11 и 12 с, а также между 14 и 16 с на рисунке 95).

Очевидно, чтобы уменьшить количество жертв, нужно уменьшить число пересекающихся потоков вблизи дверей, а еще лучше — исключить их пересечение вообще. Самое первое, что приходит в голову, это попросить всех стать в очередь. Конечно, в условиях паники это нереально, но помещение можно спроектировать так, чтобы даже паникующая толпа, подходя к дверям, вынуждена была выстраиваться в очередь.

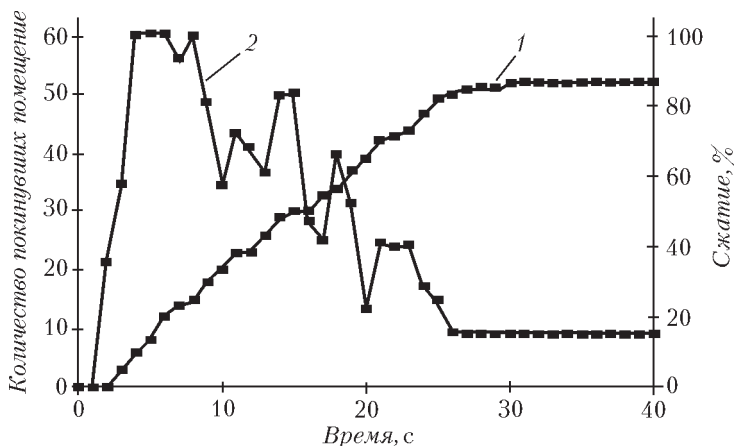


Рис. 95. Зависимость количества людей, покинувших помещение (кривая 1), и максимальной величины сжатия в толпе (кривая 2) от времени, прошедшего после начала паники ($v_0 = 1,7$ м/с, $b = 1,7$ м, исходное число человек в комнате 63, пять из которых стали жертвами давки)

Выстраиваем толпу в очередь. На рисунке 96 изображено помещение, выходя из которого, люди должны пройти через сужающийся коридор, в результате чего все они у дверей имеют один и тот же вектор «желаемой» скорости $\overline{v_0}$. Иными словами, направляющий коридор, предшествующий дверям, препятствует возникновению встречных людских потоков у дверей. Поэтому разумно предположить, что при тех же начальных условиях толпа выйдет из помещения через сужающийся коридор быстрее и без жертв.

Результаты моделирования бегства толпы из такого помещения показаны на рисунках, которые иллюстрируют различные моменты движения: подход к направляющему коридору (рис.97), выстраивание в очередь и выход первого человека через дверь (рис.98), а также момент, ког-

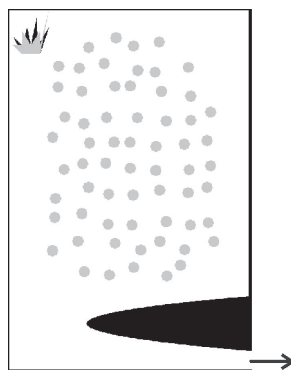


Рис. 96. Помещение тех же размеров, что и на рисунке 91, но с направляющим коридором, предшествующим выходу. Исходное распределение людей то же, что и на рисунке 91, $v_0 = 0$

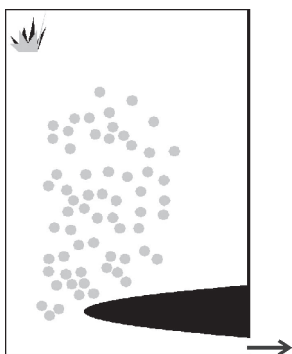


Рис. 97. Распределение людей в комнате через 3 с после начала паники, когда первые люди достигли направляющего коридора ($v_0 = 1,7 \text{ м/с}$, $b = 1,1 \text{ м}$)

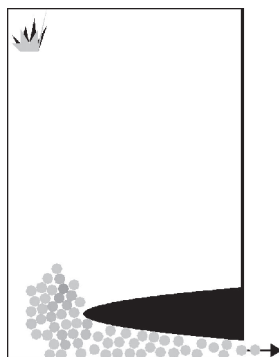


Рис. 98. Распределение людей в комнате через 11 с после начала паники, когда первый человек покидает помещение ($v_0 = 1,7 \text{ м/с}$, $b = 1,1 \text{ м}$)

да половина людей покинули помещение (рис.99). Зависимость времени выхода первого человека (лев. верх), половины всех людей (лев. низ), максимальной силы сжатия у дверей в процентах к допустимой (прав. верх) и количества жертв (прав. низ) от уровня паники и ширины дверей для начальных условий, изображенных на рисунке 96, приведена в таблице 11 (построенной аналогично таблице 10).

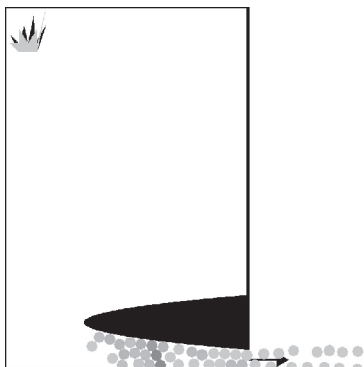


Рис. 99. Распределение людей через 21 с после начала паники, когда почти половина людей покинули помещение ($v_0 = 1,7 \text{ м/с}$, $b = 1,1 \text{ м}$)

Как и следовало ожидать, направляющий коридор значительно уменьшает давление людей друг на друга, делая его меньше критического, что исключает появление жертв давки в том же диапазоне изменения ширины дверей и скорости v_0 . Кроме того, как иллюстрирует таблица 11, направляющий коридор делает зависимость времени $t_{1/2}$ от ширины двери еле заметной. Значит, действительно зависимость $t_{1/2}$ от ширины двери, имевшая

Таблица 11

	Ширина двери $b = 1,1 \text{ м}$		Ширина двери $b = 1,3 \text{ м}$		Ширина двери $b = 1,5 \text{ м}$		Ширина двери $b = 1,7 \text{ м}$	
Паника, $v_0 = 0,7 \text{ м/с}$	24	61	24	21	24	18	23	23
	45	нет	43	нет	42	нет	42	нет
Паника, $v_0 = 1,1 \text{ м/с}$	16	58	16	48	16	58	16	32
	30	нет	28	нет	28	нет	27	нет
Паника, $v_0 = 1,5 \text{ м/с}$	12	64	12	60	12	86	12	44
	23	нет	22	нет	22	нет	21	нет
Паника, $v_0 = 1,7 \text{ м/с}$	11	68	11	77	11	94	11	60
	21	нет	20	нет	21	нет	18	нет

место в том случае, когда дверь была в середине стены (таблица 10), возникает из-за пересечения там нескольких потоков людей.

Интересно, что в тех случаях когда ширина двери не позволяет через нее пройти сразу двоим (1,1 м), направляющий коридор практически устраняет зависимость сил сжатия и от уровня паники (v_0), которая присутствует при более широких дверях. Отсутствие роста сил сжатия при панике в этом случае тоже говорит о том, что траектории движения людей не пересекаются.

Продолжите сами, если вам интересно! Моделируя движение толпы, мы рассмотрели всего два случая – дверь расположена в центре стены или имеется направляющий коридор. При этом всех людей мы сделали одинаковыми. А что будет, например, если в толпе есть дети, «диаметр» и масса которых, как известно, меньше, чем у взрослых? Как зависит количество жертв от разброса параметров людей? Кто страдает в первую очередь?

Мало того что мы в своей модели сделали всех людей одинаковыми, мы лишили их разума, наделив только стремлением – вектором, направленным к двери. На самом деле, каждый человек даже в условиях паники оглядывается по сторонам и, если видит, что движение в направлении выхода затруднено, начинает искать обходные пути. Если ваша программа уже написана, попробуйте включить «оглядывание» в ее текст – полученные данные вас, по-видимому, удивят.

МОЛНИЯ: БОЛЬШЕ ВОПРОСОВ, ЧЕМ ОТВЕТОВ

В каждый момент времени в разных точках Земли сверкают молнии более чем 2000 гроз, каждую секунду около 50 молний ударяют в землю, и в среднем один квадратный километр поражается молнией около шести раз в году. Еще Б.Франклин показал, что молнии, бьющие по земле из грозовых облаков, – это электрические разряды, переносящие на нее отрицательный заряд. При этом каждый из разрядов снабжает Землю несколькими десятками кулонов, а амплитуда тока при ударе молнии составляет от 20 до 100 кА.

Скоростная фотосъемка показала, что разряд молнии длится несколько десятых долей секунды и состоит из нескольких более



Рис. 100. Разряд молнии

коротких (рис.100). Молнии издавна интересуют ученых, но и в наше время об их природе мы знаем лишь немного больше, чем 250 лет тому назад, хотя смогли обнаружить молнии даже на других планетах.

Молния – вечный источник подзарядки электрического поля Земли. С помощью измерительных приборов, установленных на атмосферных зондах, в начале XX века было измерено электрическое поле Земли, на-

пряженность которого у поверхности оказалась равной около 100 В/м, что соответствует суммарному заряду планеты приблизительно 400000 Кл. Переносчиком зарядов в атмосфере Земли служат ионы, концентрация которых увеличивается с высотой и достигает максимума на высоте 50 км, где под действием космического излучения образовался электропроводящий слой – ионосфера. Поэтому электрическое поле Земли – это поле сферического конденсатора с приложенным напряжением около 400 кВ. Под действием этого напряжения из верхних слоев в нижние все