191. Пусть $F_n = 2^{2^n} + 1$. Рассмотрим произведение

$$1 \cdot F_0 F_1 \ldots F_n = \left(2^{2^0} - 1\right)\left(2^{2^0} + 1\right)\left(2^{2^1} + 1\right)\ldots\left(2^{2^n} + 1\right) = 2^{2n+1} - 1 =$$
$$= F_{n+1} - 2 .$$

Никакой простой делитель чисел F_i при $1 \le i \le n$ не является делителем числа F_{n+1}.

192. Это, например, числа

$$2 + (n+1)!, \quad 3 + (n+1)!, \quad \ldots, \quad (n+1) + (n+1)!.$$

193. Воспользуйтесь так называемой «китайской теоремой об остатках».

Китайская теорема об остатках. Пусть даны попарно взаимно простые натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и целые неотрицательные числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ такие, что $0 \le r_i \le m_i - 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Существует m последовательных натуральных чисел $N, N+1, \ldots, N+n-1$ таких, что $N + i \equiv r_{i+1} \pmod{m_{i+1}}$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$).

Из этой теоремы следует, что при $m_1 = 2^2, m_2 = 3^2, \ldots, m_n = p_n^2$ (p_n − n-е простое число) и $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ существуют числа N, $N+1$, …, $N+n-1$ такие, что N_i делится на $m_{i+1} = p_{i+1}^2$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$).

194. Пусть $2^k \le n < 2^{k+1}$. Тогда после приведения суммы дробей к общему знаменателю числитель полученной дроби окажется нечетным, а знаменатель − делящимся на 2^k.

195. Утверждение следует из тождеств

$$\frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1}, \quad \frac{1}{p-2} + \frac{1}{2} = \frac{p}{2(p-2)}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad \frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}} = \frac{4p}{p^2-1}.$$

После сложения получаем

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1} = p\left(\frac{1}{1\cdot(p-1)} + \frac{1}{2\cdot(p-2)} + \ldots + \frac{1}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}\right).$$

196. Нет. Пусть $n_i = 3^k \le n_{1971} < 3^{k+1}$. После приведения суммы дробей к общему знаменателю получится дробь с числителем, не делящимся на 3.

197. По условию

$$a = k_1 b + r_1,$$
$$b = k_2 r_1 + r_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = k_{n+1} r_{n-1} + r_n,$$
$$r_{n-1} = k_{n+2} r_n.$$

Поскольку последовательность r_i убывающая, она в конце концов оборвется, но это и значит, что при некотором n остаток r_{n-1} делится на r_n. Но и $r_{n-2}, r_{n-3}, \ldots, a$ и b делятся на r_n, т.е. r_n − общий делитель чисел a и b. С другой стороны, r_n делится на каждый общий делитель чисел a и b. Поэтому $r_n = \text{НОД}(a, b)$.

198. Существует в точности $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ чисел, не превосходящих n и делящихся на p^k. Поэтому максимальная степень простого числа p, на которую делится $n!$, в точности равна

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right],$$

где $p^k \le n < p^{k+1}$.

199. $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] < \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \ldots + \frac{n}{p^k} + \ldots =$
$= \frac{n}{p-1} \le n$.

200. Пусть p − простое число, не превосходящее n. Число $(n!)^{(n-1)!}$ делится на p^k, где

$$k = (n-1)!\left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots\right).$$

С другой стороны, $(n!)!$ делится на p^l, где

$$l = \left[\frac{n!}{p}\right] + \left[\frac{n!}{p^2}\right] + \ldots$$

Но $[ma] \ge m[a]$ при натуральном m и положительном a. Поэтому $l \ge k$. Отсюда и следует утверждение задачи.

201. а) Если n − простое число, $n = 4$; б) если $n = p$, $n = 2p$ (p − простое число), $n = 8$, $n = 9$.

202. Ясно, что p − простое. Если же $p \le n/2$, то $2p \le n$.

203. Если $p = ab$ − составное число, то $(p - 1)! + + 1$ не делится на a.

Пусть теперь p − простое число. Пусть $a(1 \le a \le p-1)$ − натуральное число. Докажите, что при $a \ne 1$, $a \ne p-1$ среди чисел 2, 3, ..., p − 2 найдется такое a', что $a'a \equiv 1(\bmod p)$. В произведении $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)$ объединим в пары сомножители 2 и $2'$, 3 и $3'$ и т.д. Такие произведения дают при делении на p остаток 1. Без пары остаются числа 1 и p − 1. Поэтому

$$(p-1)! \equiv p-1(\bmod p),$$

т.е. $(p - 1)! + 1$ делится на p.

204. Если a делится на p, утверждение очевидно. Если a не делится на p, выпишем числа a, $2a$, ..., $(p-1)a$. Все эти числа дают различные остатки при делении на p. Поэтому

$$a \cdot 2a \cdot \ldots \cdot (n-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)(\bmod p),$$

отсюда $a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)!(\bmod p)$. Поэтому (см. свойство 5 сравнений, с. 85) $a^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$.

205. Пусть n − составное число, а число a взаимно просто с n. Рассмотрите все возможные остатки от деления чисел на n, взаимно простые с n:

$$r_1 = 1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$$

(это все числа, меньшие n и взаимно простые с ним). Умножим все числа выписанной строчки на a:

$$a, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(n)}.$$

Все эти числа по-прежнему взаимно просты с n и дают при делении на n различные остатки, т.е. вторая строчка отличается от первой лишь порядком чисел. Перемножив числа первой и второй строчек, получаем сравнение

$$r_1 r_2 \ldots r_{\varphi(n)} \equiv a^{\varphi(n)} r_1 r_2 \ldots r_{\varphi(n)} (\bmod n),$$

или

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1(\bmod n).$$

Малая теорема Ферма является следствием теоремы Эйлера при $n = p$.

206. а) $p^k - p^{k-1}$.

б) Выпишем натуральные числа от 1 до mn:

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(m-1)n} \\ n(m-1)+1 & & \ldots & mn \end{array}$$

В этой таблице имеется в точности $\varphi(n)$ столбцов, состоящих из чисел, взаимно простых с n. В каждом столбце стоит арифметическая прогрессия длины m с разностью n. Все остатки от деления на m чисел столбца различны (это следует из взаимной простоты чисел m и n). Поэтому среди них в точности $\varphi(m)$ чисел, взаимно простых с m. Поэтому в таблице в точности $\varphi(m)\varphi(n)$ чисел взаимно просты с mn.

в) $\varphi\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}\right) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right)\ldots\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right) =$

$$= \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}\right)\left(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}\right)\ldots\left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}\right) =$$

$$= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

207. Поскольку $p^3 - 1 = (p-1)\left(p^2+p+1\right)$, а q – простое число, большее p – 1, имеем $p^2+p+1 = kq$ (k – натуральное число). Из того, что $q = lp + 1$ и $p^2+p+1 = k(lp+1)$, следует, что $k-1$ делится на p, т.е. $k = sp+1$. Но тогда $p^2+p+1 = (sp+1)q$ и потому $p^2+p+1 \geq (sp+1)(p+1)$, что возможно лишь при $s =$ $= 0$, т.е. при $k = 1$.

Заметим, что мы не пользовались простотой числа p, так что это условие можно снять.

Пример: $p = 6$, $q = 43$, $p^3 - 1 = 215 = 5 \cdot 43$, $a - 1 = 42 \vdots p$, $43 = 6^2 + 6 + 1$.

208 и **209.** Таким свойством обладают все числа вида $9n + 5$ и $8n + 7$ соответственно.

210. $1967 \equiv 7 \pmod 8$.

211. Предположим, что все остатки чисел $a_i + b_i$ ($i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 2n$) от деления на $2n$ различны. Их сумма равна

$$1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n+1) \equiv n \pmod{2n},$$

т.е. не делится на $2n$. С другой стороны, эта сумма дает при делении на $2n$ такой же остаток, что и сумма

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)+\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)=2n\left(2n+1\right)\equiv 0\left(\operatorname{mod}2n\right).$$

Противоречие.

212. Период 20. Докажите, что наименьший период делится на 10 и не равен 10, а

$$\frac{(n+20)(n+21)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}\equiv 0\left(\operatorname{mod}10\right).$$

213. Период 20. Воспользуйтесь тем, что последние цифры чисел n и n^5 совпадают.

214. Разность равна 30.

215. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n$ – числа, записанные в первой строке, S – их сумма. Имеем:

$$\left(a_1+a_2\right)+\left(a_2+a_3\right)+\ldots+\left(a_{n-1}+a_n\right)=2S-a_1-a_n.$$

Примените преобразование, при помощи которого получается очередная строка таблицы к этим числам.

216. Воспользуйтесь равенством $u_{n+5}=5u_{n+1}+3u_n$.

217. Докажите, что $a_n=(n-1)\left(a_{n-1}+a_{n-2}\right)$.

218. Докажите, что остатки от деления a_n на 4 повторяются при $n>1$ с периодом 3, т.е. что $a_{n+3}\equiv a_n\left(\operatorname{mod}4\right)$ при $n\geq 2$. Воспользуйтесь тем, что число $2^{1968}-1$ делится на 3.

219. Остаток от деления на 11 количества полученных частей не меняется, но $20\not\equiv 1968\left(\operatorname{mod}11\right)$.

220. Разность прогрессии должна делиться на 2, 3, 5, 7, 11, 13, т.е. $d\geq 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 13>30000$.

221. Если $l^2<k$, а $(l+1)^2>2k$, то $l^2-l-1<0$, т.е. $l<1+\sqrt{2}$. Для $k=1$ утверждение очевидно.

222. Можно. Это, скажем, числа $2,2^3,2^5,\ldots,2^{2n-1}$. Максимальная степень двойки, на которую делится сумма любых чисел из этого множества, нечетна.

223. а), б). Нельзя. Докажите, что остаток от деления на 4 суммы всех имеющихся на доске чисел не меняется.

224. При $n\equiv 5\left(\operatorname{mod}23\right)$. Поскольку $7\left(4n+5\right)-4\left(7n+3\right)=$ $=23$, любой общий делитель числителя и знаменателя – делитель числа 23. Выясним, при каких n числитель (а следовательно, и знаменатель) делится на 23. Имеем: $4n+3=23k$. Это равенство выполняется при $n=5$ и $k=1$: $4\cdot 5+3=23\cdot 1$. Но тогда $4\left(n-5\right)=23\left(k-1\right)$, откуда следует, что $n=5+23l$, где l – целое.

225. При $n = -3, -1, 0, 1, 2$. Воспользуйтесь равенством

$$\frac{n^5+3}{n^2+1} = \frac{n^5+n^3-n^3-n+n+3}{n^2+1} = n^3 - n + \frac{n+3}{n^2+1},$$

а также тем, что $0 < \left|\frac{n+3}{n^2+1}\right| < 1$ при $|n| > 2$, $n \neq -3$.

226. Воспользуйтесь равенством

$$3(7m+18n) - 7(3m+5n) = 19n.$$

227. Пусть каждый член профсоюза получал x слонов, а не член просоюза – y слонов. Всего было роздано $N = 28x + 37y$ слонов. Так как $N = 28(x - 37) + 37(y + 28) = 28(x + 37) + 37(y - 28)$, то при выполнении любого из двух условий $x \geq 37$ или $y \geq 28$ существует по меньшей мере два способа раздачи. Итак, $x \leq 36$, $y \leq 28$, и наибольшее возможное количество слонов равно $N = 28(37 - 1) + 37(28 - 1) = 2007$. (Вообще, наибольшее натуральное число N, представимое единственным образом в виде $ax + by$, где a и b натуральные, а x и y — целые неотрицательные числа, равно $a(b - 1) + b(a - 1)$.)

228. Если ни a, ни b не делятся на 3, то $a^2 \equiv 1 \pmod 3$, $b^2 \equiv 1 \pmod 3$, следовательно, $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 3$ и, значит, $a^2 + b^2$ не может быть квадратом. Если a и b нечетны, то $a^2 + b^2$ четно, но не делится на 4. Если $a = 4k + 2$, а b – нечетно, то $a^2 + b^2 \equiv 5 \pmod 8$ и $a^2 + b^2$ – не квадрат. Если c не делится на 5, то одно из чисел a или b делится на 5.

229. Пусть $121k + 8 = l(l+1)$. Число $l^2 + l - 8$ делится на 11, а так как $l^2 + l - 8 = (l-5)^2 + 11l - 33$, получаем, что $l = 11m + 5$. Но в таком случае число $l^2 + l - 8 = 121(m^2 + m) + 22$ не делится на 121.

230. При $k = 22p^2 + 30p + 10$ и $k = 22p^2 + 14p + 2$, p – целое. Пусть $22k + 5 = m^2$. Докажите, что $m = 11l \pm 4$, а затем найдите подходящие значения l.

231. 48. Пусть $a^2 + a + 1969 = m^2$. Тогда

$$(2m)^2 - (2a+1)^2 = 7875 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 = A,$$

т.е. $(-2a - 1 + 2m)(2a + 1 + 2m) = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$.

Отсюда следует, что $-(2a+1) + 2m = u$, $2a + 1 + 2m = v$, где u и v – делители числа A ($uv = A$). Заметим, что так как A дает остаток 3 при делении на 4, числа u и v дают при делении на 4 разные остатки и потому из уравнений

$$2a+1=\frac{v-u}{2} \text{ и } 2m=\frac{u+v}{2}$$

находятся целые числа a и m, причем разным разложениям A на множители соответствуют различные значения a. Число же таких разложений (множители могут быть и отрицательными: если $uv = A$, то и $(-u)(-v)=A$) равно удвоенному количеству делителей A.

232. Уравнение $t^2+t-1=0$ $\left(t=\dfrac{x}{y}\right)$ не имеет рациональных корней.

233. а) $(x,y)=(0,0),(2,1)$. Из равенства $3^x=(y+1)\left(y^2-y+1\right)$ следует, что $y+1=3^k$. Если $y\neq 0$, число y^2-y+1 делится на 3 и не делится на 3^2.

б) $(1,1),(2,3)$. Если $3^x-1=2^y$, причем $x\neq 1$, то x – четное число, т.е. $x = 2k$, но тогда $3^k-1=2^l$, $3^k+1=2^m$, откуда $2^m-2^l=2$, что возможно только при $m = 2$, $l = 1$.

в) $(0,0),(1,1)$. Воспользуйтесь равенством $(1+x)\left(1+x^2\right)=2^y$, из которого следует, что $1+x=2^l$, $1+x^2=2^m$, где $l + m = y$.

234. а) Рассмотрите остатки от деления x и y на 3.

б) Рассмотрите остатки от деления x и y на 9.

в) Докажите, что x, y и z делятся на 13.

235. $m = n = 0$. Если $n=t^2$, то $t^2<t^2+t<(t+1)^2$, так что уже $\sqrt{n+\sqrt{n}}$ – не целое число.

236. а) Пусть $x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, $y=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k}$, где $\alpha_i\geq 0$, $\beta_i\geq 0$ при $i = 1, 2, \dots, k$. Из равенства $x^n=y^m$ следует, что $n\alpha_i=m\beta_i$, и из взаимной простоты m и n следует, что $\beta_i=\gamma_i n$, $\alpha_i=\gamma_i m$, но тогда $x=p_1^{\gamma_1 m}p_2^{\gamma_2 m}\dots p_k^{\gamma_k m}=t^m$, $y=t^n$, где $t=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\dots p_k^{\gamma_k}$.

б) $a=t^m, b=t^n$, где m, n и $t > 0$ – целые числа.

237. а) $x = y$. Предположив, что $x > y$, получаем $x^x-y^x-\left(x^y-y^y\right)=(x-y)\cdot M$, где $M > 0$.

б) $x = y$. Воспользуйтесь результатом задачи 236, а).

238. а) $x=\dfrac{2k-1}{1-k^2}, y=\dfrac{k^2-k+1}{1-k^2}$, где $k\neq\pm 1$ – рациональное число. Поскольку $(0,1)$ – рациональное решение данного уравнение, положим $y = kx + 1$, где k – рациональное число. Подставим это выражение в уравнение и выразим x через k.

Если, наоборот, (x, y) − решение, то $y - 1 = kx$, где k − рациональное число.

б) Пусть

$$8a^2 - 2a - 3 = x^2, \qquad (*)$$

где x − рациональное число. Заметьте, что $a = 2$, $x = 5$ − решение уравнения $(*)$. Введите рациональный параметр k по формуле $k(a-2) = x - 5$.

239. Заметим, что $x = 9$, $y = 4$ − решение данного уравнения. Пусть $\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{5}$. Целые числа A_n и B_n удовлетворяют уравнению, так как

$$1 = \left(9 - 4\sqrt{5}\right)^n \left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n = \left(A_n - B_n\sqrt{5}\right)\left(A_n + B_n\sqrt{5}\right) = A_n^2 - 5B_n^2.$$

240. а) Пусть $x - y = t$. Тогда $y = x - t$ и

$$t(6x + 1) = x^2 + 3t^2. \qquad (*)$$

Если p − простой делитель числа t, то x делится на p и, следовательно, правая часть $(**)$ делится на четную степень p. Поэтому всякий простой делитель t входит в его разложение на простые множители в четной степени.

Решение б) аналогично а).

в) Приведем уравнение к виду

$$3(4x + 1)^2 = 2(6y + 1)^2 + 1,$$

или $3p^2 - 2q^2 = 1$, где $p = 4x + 1$, $q = 6y + 1$. Одно из решений этого уравнения $p = q = 1$ (ему соответствуют значения $x = y = 0$). По аналогии с решением задачи 119 докажите, что числа p_n и q_n, определяемые при $n \geq 0$ равенством

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{2n+1} = p_n\sqrt{3} + q_n\sqrt{2}$$

− тоже решения уравнения $(*)$, которым не обязательно соответствуют целые значения x и y. Однако, записав соотношение

$$p_{n+1}\sqrt{3} + q_{n+1}\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^{2(n+1)+1} =$$

$$= \left(5 + 2\sqrt{6}\right)\left(p_n\sqrt{3} + q_n\sqrt{2}\right) = (5p_n + 4q_n)\sqrt{3} + (6p_n + 5q_n)\sqrt{2},$$

получим, что $p_{n+1} = 5p_n + 4q_n$, $q_{n+1} = 6p_n + 5q_n$. Пользуясь этими соотношениями, убедитесь, что $p_{n+2} \equiv p_n \pmod 4$, а $q_{n+2} \equiv q_n \pmod 6$. А поскольку $p_0 = q_0 = 1$, то и $p_{2n} \equiv 1 \pmod 4$, $q_{2n} \equiv 1 \pmod 6$, т.е. этим числам соответствуют целые значения x и y. Например, при $n = 2$ получаем $x = 22$, $y = 18$.

Глава 3. Разные задачи

241. 10 часов.

242. 14.

243. 1/2.

244. а) Выстроим восьмиклассников по росту, начиная с самого низкого. Для k-го по росту восьмиклассника найдутся k семиклассников, которые ниже его.

б) Сводится к задаче а): достаточно провести те же рассуждения для любых двух колонн.

245. Каждый раз число пустых ящиков увеличивается на $k-1$, наполненных – на 1. Вначале (когда не было ни одного заполненного ящика) был один пустой ящик. Когда заполненных ящиков будет m, пустых ящиков будет $1+(k-1)m$.

246. а) Согласно правилу, по которому составляется последовательность, общее количество чисел 1, 3, $3^2,\ldots,3^{m-1}$ (делителей числа 3^{m-1}) в последовательности равно 3^{m-1}, общее количество чисел 1, 3, $3^2,\ldots,3^m$ (делителей числа 3^m) – равно 3^m. Поэтому число 3^m встречается

$$3^m-3^{m-1}=2\cdot 3^{m-1} \text{ раз},$$

т.е. столько раз, сколько существует натуральных чисел, меньших 3^m и не делящихся на 3.

б) Докажем, что каждое натуральное число n встречается в этой последовательности столько раз, сколько существует чисел, меньших n и взаимно простых с ним, т.е. $\varphi(n)$ раз (о функции $\varphi(n)$ – см. задачу 206).

Будем рассуждать по индукции. Начало индукции очевидно – достаточно рассмотреть несколько первых членов последовательности: 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, … Пусть утверждение справедливо для всех $m<n$. Докажем, что оно справедливо и для n. Рассмотрим правильные дроби

$$\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}.$$

Среди них $\varphi(n)$ несократимых. Пусть d – делитель числа n, а $d_1=\frac{n}{d}$. Выпишем дроби, числители которых делятся на d_1. После сокращения этих дробей на d_1 получается такой ряд дробей: $\frac{1}{d},\frac{2}{d},\ldots,\frac{d}{d}$. Среди этих дробей в точности $\varphi(d)$ несократимых, т.е. столько, сколько раз по предположению индукции выписано число d.

Отсюда следует, что если $d_1 = 1, d_2, \ldots, d_n = n$ − все делители числа n, то после сокращения среди n уже несократимых дробей окажется $\varphi(1), \varphi(d_2), \ldots, \varphi(n)$ дробей со знаменателями $1, d_2, \ldots, n$. Так как все эти дроби *различны*, то

$$\varphi(1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(n) = n .$$

Из сказанного и предположения индукции следует, что в нашей последовательности число n записано

$$\varphi(n) = n - \varphi(1) - \varphi(d_2) - \ldots - \varphi(d_{k-1}) \text{ раз} .$$

247. Нетрудно видеть, что при четном n на месте могут остаться только два «противоположных» числа k и $k + \frac{n}{2}$ $\left(k < \frac{n}{2}\right)$, а при нечетном n − только одно какое-то число k. Все остальные можно разбить на пары (симметрично относительно диаметра, проходящего через k) и поменять местами, затратив на это $\frac{n-2}{2}$ (при четном n) или $\frac{n-1}{2}$ (при нечетном n) ходов. Поскольку одним ходом мы можем поставить на свои места не более двух чисел, меньшим числом ходов обойтись нельзя.

248. Каждая операция над строкой или столбцом, где сумма чисел отрицательна, увеличивает сумму чисел в таблице, а всего разных таблиц, которые можно получить заменами знаков, конечное число. Таким образом, после нескольких таких замен мы придем к таблице, с которой уже невозможно проделать эту операцию.

249. Расположим данные 35 чисел по окружности.

Рассмотрим сначала случай, когда из данных чисел можно выбрать одно, большее всех остальных. Обозначим его через M. Увеличим на единицу 23 числа, начиная со следующего после M по часовой стрелке, затем следующие 23 числа (по часовой стрелке) и затем следующие за ними 23 числа. Поскольку $2 \cdot 35 - 3 \cdot 23 = 1$, в результате все числа, кроме M, увеличатся на 3, а M − на 2.

Рассмотрим теперь случай, когда среди чисел k самых больших. Переставим числа на окружности так, чтобы эти k чисел стояли подряд. Увеличим на единицу 23 числа, начиная со следующего после k самых больших по часовой стрелке, затем следующие 23 числа (по часовой стрелке) и т. д., повторив эту операцию $3k$ раз. Поскольку $2k \cdot 35 - 3k \cdot 23 = k$, в результате k самых больших чисел увеличатся на $2k - 1$, а остальные − на $2k$.

Повторяя такие операции, можно за несколько шагов умень-