целых k, делящихся на $|a_n|$, число $p(k)$ будет составным. Если $|a_n|=1$ и $p(1)$ − простое число, то рассмотрим многочлен $p(k+1)=kq(k)+p(1)$. При достаточно больших k, делящихся на $p(1)$, $p(k+1)$ делится на $p(1)$ и не является простым числом.

110. а) 1; б) 1. Для любого многочлена $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ имеем $p(1)=a_0+a_1+\ldots+a_n$, $p(-1)=(-1)^n a_0+(-1)^{n-1}a_0+\ldots+a_n$, так что сумма коэффициентов при четных степенях равна $\dfrac{p(1)+p(-1)}{2}$ а при нечетных $\dfrac{p(1)-p(-1)}{2}$.

111. $x+1$.

112. Пусть $h(x)=x^2+x+1$. Тогда $x+1=h(x)-x^2$ и $\left(h(x)-x^2\right)^{2n+1}+x^{n+2}=p(x)h(x)-x^{n+2}\left(x^{3n}-1\right)$, но $x^{3n}-1$ делится на $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$.

113. а) Нет, так как $f(2)=g(2)=6$, а 2 не делится на 6.

б) Нет, так как $f(1/2)=g(1/2)=1$.

в) Да. $x=(f-g)^2+2g-3f$.

114. Может. Если первый игрок поставит своим первым ходом −1 перед x, а при втором своем ходе поставит на оставшееся место число, противоположное поставленному вторым, получится многочлен $x^3-ax^2-x+a=\left(x^2-1\right)(x-a)$, все корни которого целые.

115. Пусть $p(x)=b_0x^n+\ldots+b_{n-1}x+b_n$, $b_n\neq 0$.

а) Если числа $b_0, b_1 \ldots b_n$ неотрицательны, то сумма цифр числа $p\left(10^l\right)$ при $10^l>\max\limits_{0\le i\le n} b_i$ будет в точности равна сумме всех цифр чисел $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

б) Можно считать, что $b_0>0$ (иначе будем рассматривать многочлен $-p(x)$). Докажите, что существует такое натуральное m, при котором многочлен $Q(x)=P(x+m)$ имеет положительные коэффициенты (для этого достаточно, чтобы m было строго больше наибольшего из чисел $|b_0|,|b_1|,\ldots,|b_n|$). Осталось применить результат пункта а) к многочлену $Q(x)$.

116. а) $-2\sin\dfrac{7\pi}{18}; 2\sin\dfrac{\pi}{18}; 2\sin\dfrac{5\pi}{18}$. Выполнив замену $x=2\sin\varphi$, где $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, приведите уравнение к виду

$\sin 3\varphi = \frac{1}{2}$. Последнее уравнение имеет в точности 3 корня на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

б) $-2\sin\frac{4\pi}{9}; 2\sin\frac{\pi}{9}; 2\sin\frac{2\pi}{9}$.

117. а) $(\cos\varphi, \cos 2\varphi, \cos 4\varphi)$, где $\varphi = 0$; $\frac{2\pi}{7}$; $\frac{4\pi}{7}$; $\frac{6\pi}{7}$; $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{9}$. После замены $x = \cos\varphi$, где $0 \le \varphi \le \pi$ система приводится к виду $y = \cos 2\varphi$, $z = \cos 4\varphi$, $\cos 8\varphi = \cos\varphi$.

б) $\operatorname{tg}\varphi, \operatorname{tg}2\varphi, \operatorname{tg}4\varphi$, где $\varphi = 0$; $\pm\frac{\pi}{7}$; $\pm\frac{2\pi}{7}$; $\pm\frac{3\pi}{7}$. Выполните замену $x = \operatorname{tg}\varphi$, где $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

в) $(\cos\varphi; \sin\varphi)$, где $\varphi = \frac{\pi}{36}; \frac{5\pi}{36}; \frac{25\pi}{36}; \frac{29\pi}{36}; \frac{49\pi}{36}; \frac{53\pi}{36}$. После замены $x = \cos\varphi$; $y = \sin\varphi$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$, и подстановки во второе уравнение получаем уравнение

$$\sqrt{2}(\cos\varphi - \sin\varphi)(1 + 2\sin 2\varphi) = \sqrt{3},$$

которое заменой $u = \sqrt{2}(\cos\varphi - \sin\varphi)$ приводится к виду $u^3 - 3u + \sqrt{3} = 0$. Решая его (см. задачу 116, б)), находим u, а затем получаем ответ из уравнений $\sqrt{2}(\cos\varphi - \sin\varphi) = u_{1,2,3}$.

118. Пусть $x = \operatorname{tg}\alpha, y = \operatorname{tg}\beta, z = \operatorname{tg}\gamma$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Из равенства $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$ следует, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi n$, где $n = 0$, $n = \pm 1$. Но тогда

$$\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\beta + \operatorname{tg}2\gamma = \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}2\gamma.$$

119. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ – данные положительные числа. Воспользуемся тем, что

$$\frac{x-y}{1+x+y+2xy} = \frac{\left(1+\frac{1}{y}\right) - \left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta),$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $\beta = \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{y}\right)$, причем α и β принадлежат интервалу $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, так что среди чисел $\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x_i}\right)$, $i = 1, 2, 3, 4$ найдутся два, разность которых меньше, чем $\frac{\pi}{12}$ ($\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$).

120. Индукцией по n нетрудно доказать, что $x_n = \operatorname{tg} n\alpha$, где $\alpha = \operatorname{arctg} 2$. а) при любом m имеем $x_{2m} = \frac{2x_m}{1-x_m^2}$. Если $x_{2m} = 0$, то тогда и $x_m = 0$. Поэтому если $x_n = 0$ при $n = 2^k(2s+1)$, то и $x_{2s+1} = 0$. Но тогда $x_{2s} = -2 = \frac{2x_s}{1-x_s^2}$, откуда $x_s = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ – иррациональное число. Противоречие. Отметим также, что $x_n \neq \frac{1}{2}$ ни при каком n (доказательство аналогично).

б) Докажем, что все члены последовательности попарно различны. Пусть $x_{m+n} = x_m$ при некоторых m и n ($m, n \geq 1$). Так как $x_n = \operatorname{tg} n\alpha$, имеем

$$\operatorname{tg}(m+n)\alpha - \operatorname{tg} m\alpha = \frac{\sin n\alpha}{\cos(m+n)\alpha \cos m\alpha} = 0,$$

откуда $x_n = \operatorname{tg} n\alpha = 0$, что невозможно (см. пункт а)).

Глава 2. Делимость целых чисел

121. Рассмотрите числа $p - 1$, p, $p + 1$.

122. $p = 3$. Если $p \neq 3$, число $14p^2 + 1$ делится на 3.

123. Если произведение P всех простых чисел, не превосходящих n, не больше n, то $P - 1 < n$ не делится ни на одно простое число $p < n$.

124. Если d – делитель числа n, то $\frac{n}{d}$ – тоже делитель. Причем либо d. либо $\frac{n}{d}$ не больше $\sqrt{n}$.

125. $n^{k/2}$.

126. См. указание к задаче 124. Полезно также заметить, что при $d \geq 1$ имеет место неравенство $d + \frac{n}{d} \leq n + 1$.

127. Всякий делитель числа n имеет вид $p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$, где $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i$ ($i = 1, \ldots, k$) и однозначно определяется набором чисел $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k)$. Количество таких наборов равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)$.

128. Умножьте второе равенство на mn.

129. Воспользуйтесь тем, что

$$\underbrace{11111\ldots111}_{2^{n+1}}=\underbrace{111\ldots11}_{2^n}\cdot\underbrace{100\ldots01}_{2^n}.$$

130. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

131. Пусть $Q=\text{НОК}\left(1,2,\ldots,\left[\sqrt[k]{n}\right]\right)$ – наименьшее общее кратное чисел $1,2,\ldots,\left[\sqrt[k]{n}\right]$. Ясно, что

$$Q=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{\alpha_l},$$

где $p_1<p_2<\ldots<p_l$ – простые числа, причем $p_l\le\sqrt[k]{n}<p_{l+1}$. Кроме того, $p_i^{\alpha_j}\le\sqrt[k]{n}<p_i^{\alpha_i+1}\le p_i^{2\alpha_i}$ при $i=1,\ldots,l$. Перемножив эти неравенства, получим $n^{l/k}<Q^2$, а так как $Q\le n$ (поскольку $k\ge 3$), то $n^{l/k}<n^2$, т.е. $l<2k$, откуда $\sqrt[k]{n}<p_{2k}$, т.е. $n<p_{2k}^k$.

132. n = 8, 9, 12, 18 и $n=8p$, где $p\ge 3$ – простое число.

Пусть $n=p^{\alpha}\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ – разложение числа n на простые множители. Если

$$p^{\alpha}\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_2^{\alpha_2}=p(\alpha+1)\cdot(\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1),$$

то

$$p^{\alpha-1}\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_2^{\alpha_2}=(\alpha+1)\cdot(\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1).$$

Из того, что $p^{\alpha-1}>\alpha$ при $\alpha>1$ и $p>3$, а $p_i^{\alpha_j}>\alpha_i+1$ при $p_i\ge 3$, следует, что $k\le 1$, причем $\alpha=1$ при $p\ge 3$. Осталось рассмотреть числа вида $2^k\cdot 3^l, 2^k p$ и $3^l p$, где $p\ge 3$.

133. n – простое, либо n – степень двойки, либо $n=6$.

Пусть n удовлетворяет условию: числа $a_1,a_2,\ldots,a_k$, взаимно простые с n, образуют арифметическую прогрессию. Очевидно, $a_1=1$, $a_k=n-1$, $a_2=p$ – наименьшее простое число, на которое не делится n. Если $p=2$, то прогрессия имеет вид 1, 2, …, $n-1$, т.е. n – простое. Если $p=3$, то разность прогрессии равна 2, а тогда n не имеет нечетных делителей и потому n – степень двойки. Если $p>3$, то $n-1=1+(k-1)(p-1)$, откуда $n=2+(k-1)(p-1)$. Если q – простой делитель числа $p-1$,то $q<p-1$ и n делится на q, откуда $q=2$, т.е. $p=2^m+1$, причем m четно (если m нечетно, то p делится на 3). Пусть $k>2$. Тогда

$a_3 = 1 + 2(p-1) = 2^{m+1} + 1$ делится на 3, но и n делится на 3, т.е. a_3 не взаимно просто с n. Поэтому $k = 2$, $n - 1 = p$, $n - 2$ и $n - 4$ – степени двойки, поскольку они не могут иметь простых нечетных делителей (эти числа меньше p), это возможно лишь при $n = 6$.

134. а) 2; б) 7.

135. 96. Две последние цифры чисел вида 4^n повторяются с периодом 10. Осталось найти последнюю цифру десятичной записи числа

$$4^{\left.4^{\cdot^{\cdot^{4}}}\right\}1972\text{ четверки}}.$$

Замечание. Будем писать

$$a \equiv b \pmod m \qquad (*)$$

(читается «a сравнимо с b по модулю m», а само соотношение $(*)$ называется *сравнением по модулю m*), если $a - b$ делится на m.

Несложно проверить следующие свойства сравнений:

1) Если $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$.

2) Если $a \equiv b \pmod m$, то $a + c \equiv b + c \pmod m$ для любого c.

3) Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a + c \equiv b + d \pmod m$.

4) Если $a \equiv b \pmod m$, то $ac \equiv bc \pmod m$ для любого c.

5) Если $ac \equiv bc \pmod m$ и c взаимно просто с m, то $a \equiv b \pmod m$.

6) Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $ac \equiv bd \pmod m$.

Использование сравнений облегчает решение некоторых задач про остатки и на делимость. Пример обращения со сравнениями приведен в указании к следующей задаче.

136. Рассмотрите степени остатков по соответствующим модулям. Например, если a не делится на 5, то $a^4 \equiv 1 \pmod 5$. Докажем это. Возводя сравнение

$$a \equiv \pm 1 \text{ или } \pm 2 \pmod 5$$

в квадрат (см. свойство 6 сравнений), получим $a^2 \equiv 1$ или $4 \pmod 5$, или

$$a^2 \equiv \pm 1 \pmod 5.$$

Возведя последнее сравнение в квадрат, окончательно получим

$$a^4 \equiv 1 \pmod 5.$$

137. Пусть $n = 10a + b$, b – нечетная цифра. Тогда $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$. Первое слагаемое не влияет на две последние цифры, во втором слагаемом – четное число десятков, а из последнего слагаемого в разряд десятков переходит четное число ($1^2 = 01$, $3^2 = 09$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$).

138. Нет. Если две последние цифры квадрата одинаковые (и отличны от нуля), то они четверки (докажите!). Если $n^2 = \ldots 4444$, то $n = 2k$, но тогда $4k^2 = \ldots 4444$, т.е. $k^2 = \ldots 11$, что невозможно. В то же время, $12^2 = 144$, $38^2 = 1444$.

139. $(10a+5)^2 = 100\left(a^2 + a\right) + 25$, а число $a^2 + a$ четно.

140. 6. Из утверждения задачи 137 следует, что последняя цифра квадрата – 4 или 6, причем если квадрат оканчивается четверкой, то ей предшествует четная цифра.

141. $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1} \equiv 5 \cdot 6^n + 27 \cdot 6^{n-1} \equiv 57 \cdot 6^{n-1} \pmod{19}$.

142. При $n = 11 + 22l$. $2^{2n+1} - 3 \cdot 7^n + 5^{n+1} \cdot 6^n \equiv$ $\equiv 2\left(4^n + 7^n\right) \pmod{23}$.

143. $n^5 - 5n^3 + 4n = n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 - 4\right) = (n-2)(n-1)n(n+$ $+1)(n+2)$. Произведение пяти последовательных целых чисел заведомо делится на 5, на 8 и на 3.

144. $p = 5$.

145. $11^3 = 1331 \equiv 1 \pmod{133}$. Поэтому $11^{19} \equiv 11 \pmod{133}$, $11^8 \equiv 11^6 \cdot 11^2 \equiv 11^2 \pmod{133}$ и $11^{19} + 11^8 + 1 \equiv 0 \pmod{133}$.

146. Рассмотрите остатки чисел $1^2, 2^2, \ldots, 18^2$ при делении на 19.

147. При нечетных n.

$$n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = \left((n-1)(n+1)\right)^2 \left(n^2+1\right)^2 \left(n^4+1\right).$$

148. $k = 6l + 1$.

149. $n = 2 \cdot 5^{1964}$.

$$3^{2 \cdot 5} + 1 = \left(3^2 + 1 - 1\right)^5 + 1 = a^5 - 5a^4 + 10a^3 - 5a^2 + 5a - 1 + 1 =$$
$$= a\left(a^4 - 5a^3 + 10a^2 - 5a + 5\right),$$

где $a = 3^2 + 1$. Полученное выражение делится на 25, поскольку a делится на 5 и выражение в скобках тоже делится на 5 (и не делится на 25). Рассуждая по индукции, докажите, что $3^{2\cdot 5^n}+1$ делится на 5^{n+1} и не делится на 5^{n+2}.

150. а) $n = 21k$; б) $n = 3\cdot 7^{k-1}$. См. указание к предыдущей задаче.

151. $a = 1407$. Поскольку $1967 = 7\cdot 281$ и $137+144 = 281$,

$$A = 137^{2k-1} + a(-137)^{2k-1} \equiv 137^{2k-1}(1-a)(\bmod 281).$$

Итак, $a-1 \equiv 0(\bmod 281)$, т.е. $a = 281l + 1$. В то же время, $A \equiv 4^{2k-1}(a+1)(\bmod 7)$. Значит, $a+1 = 281l+2 \equiv 0(\bmod 7)$, т.е. $l \equiv 5(\bmod 7)$, откуда следует, что $a = 281(7p+5)+2$. Наименьшее a получается при $p = 0$.

152. $n = 1$. $n^4+n^2+1 = \left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$.

153. 2, $5 = 2^2+1$, $257 = 4^4+1$. Число вида n^n+1 может быть простым лишь при $n = 2^k$. При этом $8^8 = 2^{24}+1 = \left(2^8\right)^3+1 = \left(2^8+1\right)\left(2^{16}-2^8+1\right)$ – число составное, а $16^{16}+1 = 2^{64}+1 > 2^{64} = 2^4\cdot 2^{60} = 2^4\cdot\left(2^{10}\right)^6 > 2^4\cdot 10^{18} > 10^{19}$.

154. $p = q = 2$.

155. $n = 2$. Одно из чисел 2^n-1 и 2^n+1 делится на 3.

156. Если $p = kl$, где $k > 1$, $l > 1$, то

$$2^p-1 = 2^{kl}-1 = \left(2^k-1\right)\left(2^{(k-1)l}+2^{(k-2)l}+\ldots+1\right).$$

157. Если $n = 2^4\cdot l$, где $l > 1$ – нечетное число, то

$$2^{2^4}+1 = \left(2^{2^4}\right)^l+1 = \left(2^{2^4}+1\right)\left(\left(2^{2^4}\right)^l-\left(2^{2^4}\right)^{l-1}+\ldots+1\right).$$

158. Если $k < 2^{1969}$ – количество вписанных нулей, то число окажется равным $10^{2^{1969}+k+1}+1$. Показатель степени $2^{1969}+k+1$ обязательно будет иметь нечетный делитель, поскольку $2^{1969}+k+1 < 2^{1970}+1$.

159. Нет.

160. Число 2^{29} девятизначно. Если в его десятичной записи нет нуля, то сумма его цифр и, следовательно, само число делится на 9.

161. 46. Требуется найти наименьшее m, при котором выполняются неравенства

$$7\cdot 10^n < 2^m < 8\cdot 10^n,$$

где n – некоторое натуральное число.

162. Понятно, что повторяющаяся цифра может быть только четной и не нулем (такое число делится на 5). Но число 2^n не может оканчиваться на …2222, …4444, …6666, …8888, поскольку в противном случае

$$2^{n-1} = \frac{\dots 2222}{2} = \dots 111, \quad 2^{n-1} = \frac{\dots 6666}{2} = \dots 333,$$

$$2^{n-2} = \frac{\dots 4444}{4} = \dots 11, \quad 2^{n-3} = \frac{\dots 8888}{8} = \dots 1,$$

получаем, что некоторая меньшая степень двойки является нечетным числом.

163. Последняя цифра числа 2^n повторяется с периодом 4, поскольку разность

$$2^{n+4} - 2^n = 16 \cdot 2^n - 2^n = 15 \cdot 2^n$$

делится на 10. Рассмотрим четыре случая: $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$.

$n \pmod 4$	b	$b \pmod 3$	$2^n \pmod 3$	$a \pmod 3$
0	6	0	1	1
1	2	−1	−1	0
2	4	1	1	0
3	8	−1	−1	0

Как видно из приведенной таблицы, либо $b = 6$, либо a делится на 3. Но поскольку b – четная цифра, ab делится на 6 в любом случае.

164. $(2n-1)^{2n+1} + (2n+1)^{2n-1} = (2n-1)^{2n+1} + 1 + (2n+1)^{2n-1} -$
$- 1 = 2n \cdot M$, где M четно.

165. Существуют. Это, например, числа a и $a + 1$, где

$$a = \underbrace{9\dots9}_{13}7\underbrace{99\dots9}_{14}.$$

166. 13. Если последняя цифра числа a равна 0, 1, 2, а сумма его цифр делится на 7, сумма цифр числа $a + 7$ тоже делится на 7. Если последняя цифра числа a равна 3, а сумма цифр числа $a + 7$ при делении на 7 дает в остатке 1, то ближайшим к $a + 7$ (оно оканчивается на 0) числом с суммой цифр, делящейся на 7, будет $a + 13$. Пример: $1006 - 993 = 13$.

167. 11967, 71967, 281967, 19671967.

168. 42857.

169. 102564.

170. $8 \cdot 123\,456\,789 = 987\,654\,312$.

171. 8712.

172. 11 101 111.

173. Воспользуйтесь признаками делимости на 9 и на 11.

174. 1! + 2! + 3! = 9. При $n > 3$ последняя цифра суммы факториалов равна 3.

175. 3. Пусть a – первая цифра десятичных записей чисел 2^n и 5^n. Тогда при некоторых k и l

$$a \cdot 10^k < 2^n < (a+1) \cdot 10^k, \quad a \cdot 10^l < 5^n < (a+1) \cdot 10^l.$$

Перемножив эти неравенства, получим

$$a^2 \cdot 10^{k+l} < 10^n < (a+1)^2 \cdot 10^{k+l},$$

т.е.

$$a^2 < 10^{n-k-l} < (a+1)^2.$$

Поскольку a – цифра, это возможно лишь при $a = 3$, $n - k - l = 1$.

176. 1972. Пусть $10^l < 2^k < 10^{l+1}$, $10^m < 5^k < 10^{m+1}$. Тогда

$$10^{l+m} < 10^k < 10^{l+m+2},$$

т.е. $k = l + m + 1$. В нашем случае $k = 1972$.

177. 10.

178. 3 и 9. Пусть k – искомое число. Тогда k нечетно и существует число a, делящееся на k и оканчивающееся на 1. Число $10a$ оканчивается на 10 и делится на k. Рассмотрим число b, полученное перестановкой 0 и 1 в десятичной записи числа $10a$. Тогда $10a - b = 9$, т.е. 9 делится на k.

179. 8. Подсчитайте сумму остатков, получаемых от деления числа n на числа, большие $n/2$, а затем оцените n.

180. Если $p = 30k + r$, где $r < 30$, то r не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, а все такие r – простые.

181. Нет. Дискрименант трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ равен $D = b^2 - 4ac$. Рассмотрите остатки от деления числа D на 8.

182. $1734 = 2 \cdot 17 \cdot 34$, $1352 = 4 \cdot 13 \cdot 52$. Пусть x и y – искомые двузначные числа. Тогда $100x + y = kxy$, т.е. $100x = (kx - 1)y$, откуда следует, что y делится на x, причем их частное $l = y/x$ меньше 9 и является делителем числа 100.

183. 1641.

184. На первом, втором или последнем местах. Если вычеркиваемая цифра b стоит на n-м месте, то число можно записать так: $a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c$ (здесь $a \geq 1$, $1 \leq c \leq 9 \cdot 10^{n-2} - 1$), а число с вычеркнутой цифрой b имеет вид $10^{n-1}a+c$. Отношение

$$\frac{a\cdot 10^n+b\cdot 10^{n-1}+c}{10^{n-1}a+c}=10+\frac{b\cdot 10^{n-1}-9c}{10^{n-1}a+c}$$

при $a\ge 10$ не является целым числом (числитель последней дроби не равен нулю и по модулю меньше знаменателя). Несколько уточнив проведенное рассуждение, можно доказать, что вычеркиваемая цифра при $n\ge 4$ должна быть нулем.

185. Пусть $10^{100}\left(10^{99}-1\right)<A^2<10^{199}$, тогда

$$\sqrt{10^{199}-10^{100}}<A<\sqrt{10^{199}}. \qquad (*)$$

Но

$$\sqrt{10^{199}}-\sqrt{10^{199}-10^{100}}=$$

$$=\sqrt{10^{199}}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{10^{99}}}\right)=\frac{\sqrt{10^{199}}\cdot\dfrac{1}{10^{99}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{10^{99}}}}>\frac{\sqrt{10}}{2}>1.$$

Это значит, что найдется целое число A, удовлетворяющее неравенству $(*)$. Попутно мы установили, что за A можно принять $\left[\sqrt{10^{199}}\right]=\left[10^{98}\sqrt{10}\right]$.

186. Ни P_n-1, ни P_n+1 не делятся ни на одно простое число, не большее, чем $\sqrt{P_n}$.

187. $N=p_1p_2\ldots p_n+1$. N не делится ни на одно из чисел $p_1,p_2,\ldots,p_n$ и, следовательно, либо само N – простое, либо его простой делитель больше всех p_i (i = 1, 2, …, n).

188. Всякий простой делитель числа $n!$ − 1 больше n.

189. Предположим, что множество простых чисел вида $4n+3$ конечно. Пусть $p_1,p_2,\ldots,p_m$ – все такие числа. Число $N=4p_1p_2\ldots p_m-1$ не делится ни на одно из p_i и, следовательно, поскольку оно является числом вида $4n+3$, имеет простой делитель такого же вида, отличный от всех p_i. Для чисел вида $6n+5$ рассуждения аналогичны.

190. Предположим, что число N^2 представимо в виде $N^2=p+n^{2k}$. Тогда $N-n^k=1$, а $N+n^k=p$, т.е. $p=2n^k+1$. Существует бесконечно много пар $(n;k)$, для которых число $2n^k+1$ – не простое. Так что существует бесконечно много квадратов, не представимых в требуемом виде.