54. $\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

55. Если уравнение $x^2+px+q=0$ имеет не целый корень α, то α − иррациональное число. Общий же корень уравнений из условия задачи при $p_1 \neq p_2$ и $q_1 \neq q_2$ равен $\alpha = \frac{q_2-q_1}{p_1-p_2}$, т.е. является рациональным числом.

56. Пусть α − корень уравнения $f(x)=x^2+px+q=0$, а β − корень уравнения $g(x)=x^2-px-q=0$, тогда

$$\alpha^2-2p\alpha-2q=3\alpha^2-\left(2\alpha^2+2p\alpha+2q\right)=3\alpha^2,$$

а

$$\beta^2-2p\beta-2q=-\beta^2+\left(2\beta^2-2p\beta-2q\right)=-\beta^2.$$

Это значит, что квадратный трехчлен $x^2-2px-2q$ принимает на концах отрезка $[\alpha;\beta]$ значения разных знаков, т.е. имеет корень на интервале $(\alpha;\beta)$.

57. Если $a \neq b$, то общий корень данных уравнений равен c.

58. Условие, что корни трехчленов $f_1(x)=x^2+p_1x+q_1$ и $f_2(x)=x^2+p_2x+q_2$ вещественны и перемежаются, эквивалентно тому, что графики $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ пересекаются в точке (x_0, y_0), лежащей ниже оси абсцисс: $y_0<0$. Решая уравнение $f_1(x)=f_2(x)$, находим $x_0=\frac{q_2-q_1}{p_2-p_1}$ и $y_0=R(p_1-p_2)^2$, где $R=(q_1-q_2)^2+(p_1-p_2)(p_1q_2-p_2q_1)$.

Замечание. Число R называется результантом многочленов f_1 и f_2. Равенство $R=0$ равносильно тому, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют общий корень.

59. Если уравнение $f(x)=x$ не имеет корней, то либо $f(x)>x$ при всех x, либо $f(x)<x$ при всех x. Но тогда либо $f(f(x))>f(x)>x$, либо $f(f(x))<f(x)<x$ при всех x.

Замечание. Утверждение задачи верно не только для квадратного трехчлена $y=f(x)$, но и для любой непрерывной функции.

60. Если существует x, при котором $f(x)\leq 0$, то корни x_1 и x_2 уравнения $f(x)=0$ существуют и расположены на некотором интервале $(m, m+1)$, где m − целое число, так что $|x_1-x_2|<1$, и $m<-\frac{p}{2}<m+1$. Поэтому p нечетно и $D>0$. Но по теореме Виета $D=p^2-4q=(x_1-x_2)^2<1$, что невозможно.

61. $a = 5$. Пусть $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ – корни многочлена $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ и $1 \le f(0)f(1) = a^2 x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) < \frac{1}{16}$. Но тогда $a^2 > 16$, т.е. $a \ge 5$. При $a = 5$ трехчлен $5x^2 - 5x + 1$ имеет 2 корня на интервале $(0; 1)$.

62. Пусть несократимые дроби $-\frac{p}{q}$ и $-\frac{r}{s}$ (p, q, r, s – натуральные) – корни трехчлена $ax^2 + bx + c$. Тогда $ax^2 + bx + c = (qx + p)(sx + r)$ (докажите!) и $\overline{abc} = (10q + p)(10s + r)$, что противоречит простоте числа $\overline{abc}$.

63. Нет, так как $D = b^2 - 4ac$ при нечетных a, b и c не является квадратом целого числа (D при делении на 8 дает в остатке 5).

64. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$. Так как $f(1) = g(1)$ и $f(-1) = g(-1)$, то $|g(1)| \le 1$, $|g(-1)| \le 1$ и, кроме того, $|c| = |f(0)| \le 1$. Предположим, что существует точка $x \in [-1; 1]$, для которой $|g(x)| > 2$. Тогда вершина параболы $y = g(x)$ – точка с координатами $(x_0; g(x_0))$, причем $|x_0| \le 1$ и $|g(x_0)| > 2$. Выделяя полный квадрат, получим $g(x) = c(x - x_0)^2 + g(x_0)$. Подставим в это равенство ближайшее к x_0 из чисел 1 и –1 (можно считать для определенности, что это 1). Тогда $|1 - x_0| \le 1$ и поэтому $|g(x_0)| = \left|g(1) - c(1 - x_0)^2\right| \le |g(1)| + |c| \le 2$, что противоречит неравенству $|g(x_0)| > 2$. Пример трехчлена $f(x) = 2x^2 - 1$ показывает, что оценку $|g(x)| \le 2$ улучшить нельзя (в этом случае $g(x) = -x^2 + 2$).

65. Все такие окружности проходят через точку $(0; 1)$. Возможны 3 случая расположения параболы (рис.34). Во всех

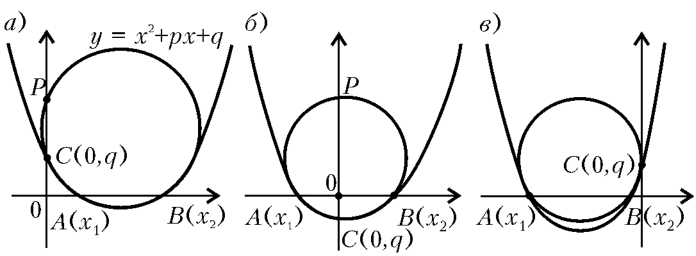

Рис. 34

случаях $OA \cdot OB = OC \cdot OP$, откуда $|x_1x_2| = |q| \cdot OP$, а так как по теореме Виета $x_1x_2 = q$, получаем $p = 1$.

66. а) Второе число. Обозначим первое число через A, а второе через B. Пусть $a = 1998$. Тогда

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2 - a}{a^2 + 2a + 1} < 1.$$

б) Второе число. Если $a = 1992$, то $(a+1)^{a-1} \cdot (a-1)^{a+1} =$

$$= \frac{a-1}{a+1}\left(a^2 - 1\right)^a < a^{2a}.$$

67. Второе. Пусть $x = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \ddots \cfrac{1}{1995}}}$, $y = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{1995}}}}$.

Ясно, что $y > x$. Но тогда

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + x}} < \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + y}}.$$

68. а) Второе, ибо $\left(\frac{3}{5}\right)^{100} + \left(\frac{4}{5}\right)^{100} < \left(\frac{3}{5}\right)^{3} + \left(\frac{4}{5}\right)^{3} = \frac{91}{125} < 1$.

б) Второе, так как $\frac{\left((29 \cdot 2)^2\right)^{100}}{\left((5 \cdot 3)^3\right)^{100}} \cdot \frac{5^{21}}{2^{49}} = \left(\frac{3364}{3375}\right)^{100} \cdot \left(\frac{125}{128}\right)^{7} < 1$.

69. Первое. Пусть $a = 1991$. Тогда $\left(\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}\right)^2 = 2a +$ $+ 2\sqrt{a^2 - 1} > 4a$.

70. Второе число больше. Сначала докажите, а затем воспользуйтесь неравенством $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} < \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$ при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

71. а) Пусть $n = 1992$. Разобьем данную сумму на 3 группы по n слагаемых:

$$S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}} + = \underbrace{\frac{1}{2n+1} + \ldots + \frac{1}{3n}} + \underbrace{\frac{1}{3n+1} + \ldots + \frac{1}{4n}}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{n}{n+1},$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2n+1} + \ldots + \frac{1}{3n} < \frac{n}{2n+1},$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3n+1} + \ldots + \frac{1}{4n} < \frac{n}{3n+1},$$

получаем

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < S_n < \frac{n}{n+1} + \frac{n}{2n+1} + \frac{n}{3n+1} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

т.е. $\frac{13}{12} < S_n < \frac{11}{6}$.

б) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n\ \text{раз}} = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1}}_{n\ \text{раз}} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

в) Разбейте сумму на группы вида $\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^k}$ по 2^k слагаемых и воспользуйтесь пунктом б).

72. Первое число. Рассмотрите разность данных чисел.

73. а) Пусть $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100}$. Тогда

$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{99^2-1}{100^2} < x^2 < \frac{1^2}{2^2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{99^2}{100^2-1}.$$

После упрощений получаем

$$\frac{1}{200} < x^2 < \frac{1}{101}.$$

б) Воспользуйтесь индукцией. При переходе от n к $n+1$ нужно доказать неравенство

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}},$$

становящееся очевидным после возведения в квадрат и несложных преобразований.

74. Меньше. Пусть $\alpha = \frac{1}{10^5}$. Данное число равно

$$(1-\alpha)^{1+\alpha} \cdot (1+\alpha)^{1-\alpha} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \cdot \left(1-\alpha^2\right) < 1.$$

75. Если $\sqrt{2} > \frac{m}{n}$, то $\frac{n\sqrt{2} - m}{n} = \frac{2n^2 - m^2}{n\left(n\sqrt{2} + m\right)} > \frac{2n^2 - m^2}{2\sqrt{2}n^2} \geq$
$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}n^2}$.

76. а) Замените $\sqrt{3}$ на 6. б) $a^2 + |a| < \left(|a| + 1\right)^2$.

в) Обозначим $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1} = a$ ($a < 2$). Имеем
$\frac{2 - \sqrt{2 + a}}{2 - a} = \frac{1}{2 + \sqrt{2 + a}} > \frac{1}{4}$.

77. Сумма четвертых степеней не меньше суммы кубов. Пусть $x > 0$. Сравним разность $x^4 - x^3$ с разностью $x^2 - x$:

$$x^4 - x^3 - \left(x^2 - x\right) = x^2\left(x^2 - x\right) - \left(x^2 - x\right) = \left(x^2 - x\right)\left(x^2 - 1\right) =$$
$$= x\left(x + 1\right)\left(x - 1\right)^2 \geq 0.$$

Осталось записать неравенства $x_i^2 - x_i^3 \geq x_i^2 - x_i$ для каждого $i =$ $= 1, 2, \ldots, n$ и почленно сложить их.

78. Пусть $a < b < c$. Тогда при достаточно больших k

$$\left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{b}{c}\right)^k < 1$$

и треугольника со сторонами a^k, b^k, c^k нет.

79. Ясно, что $q_k \geq k^2$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому $\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{q_n}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n + 2}{2n + 2} > \frac{1}{2}$ (см. задачу 44).

80. $a > b$, так как $\frac{1}{2} < \sqrt{a\left(1 - b\right)} < \frac{a + 1 - b}{2}$.

81. Сложите неравенства $a > k + nb/a$ и $b > n + ka/b$ и воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

82. $\left(3 - 2\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2}\right)$. Если $b \geq a$, то $m\left(a - 1\right) \geq a^2 + a$, т.е. $a^2 - \left(m - 1\right)a + m \leq 0$, откуда $m^2 - 6m + 1 \geq 0$.

83. $a + c > b$. Рассмотрите треугольник со сторонами a и b и углом $\arccos 1/4$ между ними.

84. $\sqrt{10}$ при $x = y = z = \frac{1}{3}$. Данная сумма − это длина ломаной линии, помещенной на рис.35 ($AB = 1$, $BC = 3$).

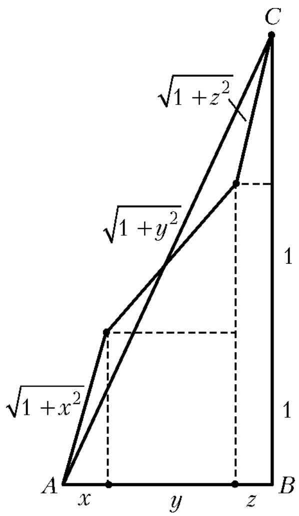

Рис. 35

Минимум суммы достигается, когда $x = y = z$, а ломаная при этом совпадает с отрезком AC.

85. 9 и 1. Точка $(a; b)$ лежит на окружности $x^2 + y^2 = 1$, а точка $(u; v)$ – на окружности $x^2 + y^2 = 4$.

86. $\sqrt{41}$. Данная функция равна сумме расстояний от точки $M(x; 0)$ до точек $A(3; 2)$ и $B(7; 3)$ соответственно. Наименьшее значение равно расстоянию от точки $A'(3; -2)$ до точки B.

87. Одно. Пусть, для определенности, $x < y < z$. Введем обозначения $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_3 = xyz$. Числа x, y и z – корни многочлена

$$P(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 .$$

По условию $\sigma_3 > 1$, поэтому $z > 1$ и $\sigma_1 > 1$. Многочлен $P(t)$ принимает положительные значения при $x < t < y$ и $t < z$. При этом если $P(1) < 0$, то $y < 1$, если же $P(1) > 0$, то $x < 1 < y$. Далее,

$$P(1) = 1 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 > 1 - \sigma_1 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_3 = \left(1 - \sigma_1\right)\left(1 - \sigma_3\right) > 0 .$$

Поэтому $0 < x < 1$, $1 < y < z$.

88. $\sqrt{2}$ при $x = \sqrt{2}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

89. Наименьшее значение s равно $1 - 2^{-\frac{1}{n}}$ и достигается при $x_k = 2^{\frac{k}{n}}\left(1 - 2^{-\frac{1}{n}}\right)$. Пусть $y_0 = 1$, $y_k = 1 + x_1 + \ldots + x_k$ $(1 \le k \le n)$. Тогда $y_n = 2$, $x_k = y_k - y_{k-1}$ и если все данные числа не превосходят s, т.е. $\dfrac{x_k}{y_k} = 1 - \dfrac{y_{k-1}}{y_k} \le s$, то $1 - s \le \dfrac{y_{k-1}}{y_k}$. Перемножив эти неравенства ($k = 1, 2, \ldots, n$), получим $(1 - s)^n \le \dfrac{y_0}{y_n} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому $s \ge 1 - 2^{-\frac{1}{n}}$. Это значение достигается, когда $1 - s = 2^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{y_{k-1}}{y_k}$ для всех k, т.е. при $y_1 = 2^{\frac{1}{n}}$, $y_2 = 2^{\frac{2}{n}}$, …, $y_n = 2$.

90. а) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$. Выполните замену $x = t - \frac{1}{t}$, где $t > 0$. (Функция $y = f(t)$ возрастает при $t > 0$ и принимает все действительные значения.)

б) $\frac{1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$. $x^4 - 4x - 1 = \left(x^2+1\right)^2 - 2(x+1)^2$.

в) $\frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$. $x^4 + 8x - 7 = \left(x^2+1\right)^2 - 2(x-2)^2$.

г) $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$. Перепишите уравнение так: $(x+1)^3 = -2x^3$.

д) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Обозначив $y = 2x^3 + x - 3$, получаем систему

$$\begin{cases} x = 2y^3 + y - 3, \\ y = 2x^3 + x - 3. \end{cases}$$

е) 1. Убедитесь в том, что $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = (x-1)^2 \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен с положительными коэффициентами.

ж) 1. Ясно, что $x > 0$. Заметим, что $x^{2k} + 1 \geq 2x^k$, а в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим $1 + x^2 + \ldots + x^{2k-2} \geq kx^{k-1}$. Перемножив полученные неравенства, видим, что левая часть уравнения не меньше правой. Учитывая условия равенства в выписанных неравенствах, получаем, что $x = 1$.

91. а) При $a < -3$ решений нет, -1 при $a = -3$, $-1 \pm \sqrt{a+3}$ при $-3 < a < -1$; 1, $-1 \pm \sqrt{2}$ при $a = -1$; $-1 \pm \sqrt{a+3}$, $1 \pm \sqrt{a+1}$ при $a > -1$. Рассмотрите уравнение как квадратное относительно a, выразите a через x, а затем решите полученные уравнения.

б) $1 - a$, $\frac{-a-1 \pm \sqrt{a^2+2a-3}}{2}$ при $a < -3$ и $a > 1$; -1, 0 при $a = 1$, 4; 1 при $a = -3$; $1 - a$ при $-3 < a < 1$.

92. Может при $a = -2c$, $b = c^2$, $c > 0$.

93. а) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{8}$. Пусть $t = \sqrt{1+x}$. Тогда $2x^3 = 3x^2t - t^3$ или ($t \neq 0$) $2z^3 - 3z^2 + 1 = 0$, где $z = \frac{x}{t}$. Отсюда либо $z = 1$, либо $z = -\frac{1}{2}$.

б) $\dfrac{\sqrt{13}-1}{4}$; $\dfrac{-1-\sqrt{61}}{30}$. Замена $t=\sqrt{x^2-x+1}$.

94. $x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Приведите уравнение к виду $2\left(x^2-y^2\right)^2+$ $+(2xy-1)^2=0$.

95. а) $\left(1;\,0;\,\sqrt{2}\right)$. К каждому из слагаемых в левой части уравнения примените неравенство $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$, справедливое при любых a и b. Далее воспользуйтесь условием равенства в этом неравенстве.

б) $(2;\,2)$.

в) $x_k=2k^2$ при $k=1,\,2,\,\ldots,\,n$.

96. При $0<a\le 2$ уравнение имеет корни $x=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{a^3-2}{3a}\right)^2}$.

Возводя левую и правую части уравнения в куб, получаем равносильное уравнение $2+3\sqrt[3]{1-x^2}\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=a^3$.

После замены суммы кубических радикалов на a приходим к следствию:

$$3a\sqrt[3]{1-x^2}=a^3-2\,.$$

Последнее уравнение имеет корни при $a=-1$ и $0<a\le 2$. Однако при $a=-1$ исходное уравнение корней не имеет. При остальных значениях a числа $\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{a^3-2}{3a}\right)^2}$ удовлетворяют исходному уравнению. Убедитесь в этом!

97. $p=0$, $p=\pm\sqrt{\dfrac{26}{27}}$.

98. $x_1=1$, $\alpha_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Уравнение приводится к виду $x=f\left(f(x)\right)$, где $f(t)=\sqrt[3]{2t-1}$. Поскольку эта функция является возрастающей, исходное уравнение равносильно уравнению $x=f(x)=\sqrt[3]{2x-1}$, которое легко решается.

99. $(0;\,0;\,0)$, $x=y=z=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Докажите, что $x=y=z$.

б) $(0;\,0;\,0)$, $x=y=z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

в) $(0;0;0)$; $(0;1;1)$; $(1;0;1)$; $(-1;0;-1)$; $(-1;-1;0)$; $\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$. Перемножим первое и третье уравнения и возведем в квадрат второе. После приравнивания левых частей полученных уравнений и упрощений приходим к соотношению $xy^2(x-y)^2=0$.

г) $(2;1),(1;-1)$. Умножьте первое уравнение на y, второе на x и сложите полученные уравнения.

д) $(0;0)$; $\left(\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{2}\right)$. Решение $(0;0)$ очевидно. Пусть теперь $y\neq 0$. Разделив обе части первого уравнения на y^5, получим систему, равносильную данной при $y\neq 0$:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}\right)^5+\dfrac{x}{y}=y^5+y,\\ \left(x^2\right)^3+x^2=(2y)^3+2y.\end{cases}$$

Пусть $f(t)=t^5+t$; $g(t)=t^3+t$. Обе функции – возрастающие, поэтому последняя система равносильна такой:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=y,\\ x^2=2y.\end{cases}$$

100. 2 решения. Очевидно решение $x=y=z$. Пусть x, y, z – ненулевое решение системы, тогда обязательно $x<0$, $y<0$, $z<$ <0. Пусть (для определенности) $x\le y\le z<0$. Тогда

$$x^2\ge y^2\ge z^2 \text{ и } x^4\ge y^4\ge z^4.$$

При этом

$$x+y^2+z^4\le z+x^2+y^4=0.$$

Поэтому если не все числа x, y, z равны между собой, то

$$x+y^2+z^4<0.$$

Отсюда следует, что

$$x=y=z<0.$$

Уравнение же

$$x^4+x^2+x=0\text{, т.е. (при } x\neq 0\text{) } x^3+x+1=0,$$

имеет единственный отрицательный корень.

101. $(0;0;0)$; $(1;1;1)$. Очевидно, что $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. Так как $\dfrac{2t}{1+t^2} \le 1$ при $t \ge 0$, то $x \le y \le z \le x$, так что $x = y = z$.

102. $x_1 = x_2 = \ldots = x_{25} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Очевидно, что $0 \le x_i \le 1$ при $i = 1, 2, \ldots, 25$. Для доказательства равенства чисел $x_1, \ldots, x_{25}$ убедитесь в том, что числа $x_2, x_4, \ldots, x_{24}$, а также числа $x_1, x_3, \ldots, x_{25}$ образуют строго монотонные последовательности, если $0 < x_1 < 1$. Поэтому все числа $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ равны.

103. Если n нечетно, то $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$. При четном n система имеет бесконечно много решений: $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = a$, $x_2 = x_4 = \ldots = x_n = \dfrac{a+2}{3a-1}$, где $a \ne \dfrac{1}{3}$ – любое число.

Вычитая из первого уравнения второе, получим $3x_2(x_1 - x_3) = x_1 - x_3$, откуда либо $x_2 = \dfrac{1}{3}$, что невозможно, либо $x_1 = x_3$. Аналогично $x_3 = x_5 = x_7 = \ldots$, $x_2 = x_4 = \ldots$ и $x_1 = x_{n-1}$. При нечетном n это означает, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, а при четном – что $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$ и $x_2 = x_4 = \ldots = x_n$.

104. Помножив первое уравнение на x и вычитая из него второе уравнение, получим $a\left(x^4 - 1\right) = 0$, т.е. $x = \pm 1$. Тогда либо $a + b + c + d = 0$, либо $-a + b - c + d = 0$.

105. Числа x, y, z – корни уравнения $t^3 - 3t = a$ при некотором a. По теореме Виета $x + y + z = 0$, $xy + xz + yz = -3$. Следовательно,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 6.$$

106. Если степень многочлена $P(x)$ больше 1, то при достаточно больших натуральных n разность $P(n+1) - P(n)$ сколь угодно велика по модулю. Поэтому между числами $P(n)$ и $P(n+1)$ найдется целое число. Это число будет значением многочлена $P(x)$ при некотором $x \in (n; n+1)$. Итак, $P(x) = ax + b$. Докажите теперь, что либо $|a| = 1$, либо $a = 0$.

107. Если $p(7) = 11$, а $p(11) = 13$, то $p(11) - p(7) = 2$. Но левая часть этого равенства делится на 4, а правая – нет.

108. Докажите, что значения такого многочлена нечетны при всех целых x.

109. Нет. Предположим, что существует такой многочлен с целыми коэффициентами: $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. Очевидно, что $a_n \ne 0$. Если $|a_n| > 1$, то при всех достаточно больших