ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ.

Глава 1. Алгебраические задачи

1. а) Если $N = a^2 + b^2$, то $2N = 2a^2 + 2b^2 = (a-b)^2 + (a+b)^2$, $N^2 = \left(a^2 - b^2\right)^2 + (2ab)^2$.

б) Если $N_1 = a_1^2 + b_1^2$, $N_2 = a_2^2 + b_2^2$, то $N_1N_2 = (a_1a_2 + b_1b_2)^2 + (b_1a_2 - a_1b_2)^2$.

2. Если $a \pm b = n$, то $2\left(a^3 \pm b^3\right) = (a \pm b)\left((a \mp b)^2 + a^2 + b^2\right)$.

3. а) $3a^4 + 1 = \left(a^2 - a\right)^2 + \left(a^2 + a\right)^2 + \left(a^2 - 1\right)^2$.

б) Бесконечно Это легко следует из пункта а): для любого t есть решение вида $x = t^2 - t$, $y = t^2 + t$, $z = t^2 - 1$.

4. Бесконечно. Уравнение переписывается так:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 6,$$

откуда видно, что любая тройка вида $x = n$, $y = n - 1$, $z = n - 2$ ему удовлетворяет.

5. а), б) Можно. Поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$, сумму $1203^2 + 1604^2 = (3 \cdot 401)^2 + (4 \cdot 401)^2 = (5 \cdot 401)^2$ можно заменить на 2005^2, а сумму $(3 \cdot 402)^2 + (4 \cdot 402)^2$ − на 2010^2.

6. $\frac{1}{2}$. Если $a + b + c = 0$, то $a^2 + b^2 + c^2 = -2ab - 2ac - 2bc$ и $ab + ac + bc = -\frac{1}{2}$, а $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$, но $(ab + ac + bc)^2 = \frac{1}{4}$, и тогда $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c) = \frac{1}{4}$.

7. Пусть $\frac{x}{a} = p$, $\frac{y}{b} = q$, $\frac{z}{c} = r$. Тогда $p + q + r = 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$, т.е. $pq + pr + qr = 0$ и $(p + q + r)^2 = p^2 + q^2 + r^2$. Следовательно, $p^2 + q^2 + r^2 = 1$.

8. а), б) Докажите, что одна из сумм $a + b$, $a + c$, $b + c$ равна нулю.

9. Докажите, что либо $a = c$ и $b = d$, либо $a = d$, $b = c$.

10. $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+xz}=\frac{1}{1+x+xy}+$
$+\frac{x}{x+xy+1}+\frac{xy}{xy+1+x}=1$.

11. -1 или 1. Перемножив равенства $x-y=\frac{y-z}{yz}$, $y-z=\frac{z-x}{xz}$, $x-z=\frac{y-x}{xy}$, получим $(x-y)(y-z)(x-z)=$
$=\frac{(y-z)(z-x)(y-x)}{x^2y^2z^2}$, откуда $x^2y^2z^2=1$.

12. $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)=$
$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)=\frac{1}{2}(x+y+z)\left((x-y)^2+\right.$
$\left.+(x-z)^2+(y-z)\right)^2$.

13. Если $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd=1$, то
$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2ab+2cd=2ad-2bc$,

или $(a+b)^2+(a-d)^2+(b+c)^2+(c+d)^2=0$,

откуда $a = -b$, $a = d$, $b = -c$, $c = -d$, что противоречит условию $ad - bc = 1$.

14. Разложите левую часть на множители.

15. а) $2003^2+2003+1$. Пусть $2003 = a$. Подкоренное выражение равно

$$a^2+a^2(a+1)^2+(a+1)^2=\left(a^2+a+1\right)^2.$$

б) 1996^2-5.

16. $\sqrt{3}-1$.

17. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

18. Числа равны. Возведите данные числа в квадрат.

19. а) 2. Если $\alpha^3-\alpha-1=0$, то $\alpha=\alpha^3-1$,

$$3\alpha^2-4\alpha=3\alpha^2-3\alpha-\alpha=3\alpha^2-3\alpha-\alpha^3+1=(1-\alpha)^3,$$
$$3\alpha^2+4\alpha+2=3\alpha^2+3\alpha+1+\alpha+1=(1+\alpha)^3.$$

б) 2. Заметим, что $\alpha^4=\alpha^2+\alpha$ и

$$2\alpha^2+3\alpha+2=(\alpha+1)^2+\alpha^2+\alpha+1=$$
$$=(\alpha+1)^2+\alpha^3+\alpha=(\alpha+1)\left(\alpha+1+\alpha^2\right).$$

Следовательно,

$$\alpha^4(\alpha+1)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)=\left(\alpha^2+\alpha\right)(\alpha+1)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)=$$
$$=(\alpha+1)^2\left(\alpha^3+\alpha^2+\alpha\right)=(\alpha+1)^2\left(\alpha^2+2\alpha+1\right)=(\alpha+1)^4.$$

20. Числа равны. Если $\alpha=\sqrt[3]{2}$, то

$$12\sqrt[3]{2}-15=3(4\alpha-5)=\left(\alpha^3+1\right)(4\alpha-4-1)=$$
$$=\left(\alpha^3+1\right)\left(\left(\alpha^3+2\right)(\alpha-1)-1\right)=\left(\alpha^3+1\right)\left(\alpha^4-\alpha^3+2\alpha-3\right)=$$
$$=\left(\alpha^3+1\right)\left(\alpha^4-2\alpha^3+2\alpha-1\right)=\left(\alpha^3+1\right)(\alpha-1)^3(\alpha+1)=$$
$$=(\alpha-1)^3(\alpha+1)^2\left(\alpha^2-\alpha+1\right)=(\alpha-1)^2\left(\alpha^2-\alpha+1\right)^2$$

(ибо $(\alpha+1)^2(\alpha-1)=\alpha^2-\alpha+1$).

Аналогично, $2\sqrt{3\sqrt[3]{4}-3}=2\left(\alpha^2-\alpha+1\right)$.

Окончательно,

$$\sqrt{12\sqrt[3]{2}-15}+2\sqrt{3\sqrt[3]{4}-3}=(\alpha-1)\left(\alpha^2-\alpha+1\right)+2\left(\alpha^2-\alpha+1\right)=$$
$$=(\alpha+1)\left(\alpha^2-\alpha+1\right)=\alpha^3+1=3.$$

21. Числа равны. Пусть $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Тогда $x^3=4-3x$, т.е. $x^3+3x-4=0$. Последнее уравнение имеет единственный корень, равный 1. Поэтому $x=1$.

22. 0 при n нечетном и 9 при n четном. Если $\left(5+\sqrt{26}\right)^n=$ $=A_n+B_n\sqrt{26}$, где A_n и B_n – целые числа, то $\left(5-\sqrt{26}\right)^n=$ $=A_n-B_n\sqrt{26}$ и $\left(5+\sqrt{26}\right)^n+\left(5-\sqrt{26}\right)^n=2A_n$. Так как

$$\left|\left(5+\sqrt{26}\right)^n\right|=\frac{1}{\left(5+\sqrt{26}\right)^n}<\frac{1}{10^n},$$

число $\left(5+\sqrt{26}\right)^n$ отличается от целого числа $2A_n$ меньше чем на $\frac{1}{10^n}$. При этом $2A_n$ больше, чем $\left(5+\sqrt{26}\right)^n$, при n четном и меньше при n нечетном.

23. Триста девяток. Пусть $f(x)=x^3-3x^2+1$. Поскольку $f(-1)<0$, $f(0)<0$, $f(1)<0$, $f(2)<0$, $f(3)>0$, уравнение имеет 3 корня $\alpha>\beta>\gamma$, причем $2<\alpha<3$, $0<\beta<1$, $-1<\gamma<0$. Пусть $S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$. По теореме Виета $\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=0$, поэтому

$$S_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=9.$$

Так как

$$\alpha^3 = 3\alpha^2 - 1,\ \beta^3 = 3\beta^2 - 1,\ \gamma^3 = 3\gamma^2 - 1, \qquad (*)$$

получаем

$$S_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) - 3 = 24.$$

Докажем, что S_n − целое число при любом $n \in \boldsymbol{N}$. Для этого, умножив равенства $(*)$на α^{n-3}, β^{n-3}, γ^{n-3} соответственно и сложив полученные равенства, приходим к соотношению $S_n = 3S_{n-1} - S_{n-3}$, из которого по индукции следует, что S_n − целое.

Так как $|\beta| < 1$, $|\gamma| < 1$, то при больших n число $\alpha^n = S_n - \left(\beta^n + \gamma^n\right)$ мало отличается от S_n. Оценим сумму $\beta^{2000} + \gamma^{2000}$. Из неравенств $f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$, $f\left(-\frac{3}{5}\right) < 0$ следует, что $0 < \beta < \frac{2}{3}$, $|\gamma| < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$, так что $\beta^{2000} + \gamma^{2000} < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{2000}$.

Далее, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} < \frac{1}{5}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^3 < \frac{1}{100}$ и, тем самым, $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} < \frac{1}{10^2}$.

Но тогда $2\left(\frac{2}{3}\right)^{2000} < 2\left(\frac{1}{10^2}\right)^{\frac{500}{3}} < 2\left(\frac{1}{10^2}\right)^{163} < \frac{1}{10^{325}}$. Так что первые 300 знаков после запятой равны 9.

24. $\alpha > \sqrt[5]{13}$. Пусть $f(x) = x^3 - x - 3$. Легко доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень α, причем $1 < \alpha < 2$. Постараемся поточнее оценить число α. Так как $f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{27} < 0$, то $\alpha > \frac{5}{3}$. Рассмотрим число α^5. Поскольку $\alpha^3 = \alpha + 3$ и $\alpha^5 = \alpha^3 + 3\alpha^2$, то $\alpha^5 = 3\alpha^2 + \alpha + 3$. Но $3\alpha^2 + \alpha + 3 > 3\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{3}{5} + 3 = 13$. Итак, $\alpha > \sqrt[5]{13}$.

25. При $m = n = 0$. Если справедливо равенство из условия, то $\left(3 - 5\sqrt{2}\right)^m = \left(5 - 3\sqrt{2}\right)^n$. Однако $\left|3 - 5\sqrt{2}\right| > 1$, а $\left|5 - 3\sqrt{2}\right| < 1$.

26. Нет. Воспользуйтесь указанием к предыдущей задаче и тем, что $5 - 4\sqrt{2} < 0$.

27. Если $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{1967} = a\sqrt{3} - b\sqrt{2}$, то $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{1967} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$. Перемножив равенства, имеем $1 = 3a^2 - 2b^2$.

28. Если $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, то $\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ и $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$. Но тогда $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{2b_n^2+1} - \sqrt{2b_n^2}$ при четном n и $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{2b_n^2} - \sqrt{2b_n^2-1}$ при нечетном n.

29. Пусть a – корень данного уравнения, т.е. $a^3 - 3a + 1 = 0$. Докажем, что $x = a^2 - 2$ – тоже его корень. Для этого вычислим

$$x^3 - 3x + 1 = \left(a^2-2\right)^3 - 3\left(a^2-2\right) + 1 = a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 1\,. \quad (*)$$

Поскольку $a^3 = 3a - 1$, то $a^6 = 9a^2 - 6a + 1$, $a^4 = 3a^2 - a$. Подставляя последние два выражения в $(*)$, получаем, что $x^3 - 3x + 1 = 0$. Утверждение доказано.

Равенство $a^2 - 2 = a$ невозможно. Поэтому либо $a^2 - 2 = b$, либо $a^2 - 2 = c$. Для завершения решения убедитесь, что равенство $a^2 - 2 = c$ невозможно. Поэтому $a^2 - 2 = b$, $b^2 - 2 = c$, $c^2 - 2 = a$.

30. а), б) $\dfrac{9091}{9901}$. б) Преобразуем числитель:

$$1010\underbrace{11\ldots1}_{2k+1}0101 = 10^{2k+8} + 10^{2k+6} + \frac{10^{2k+1}-1}{9}10^4 + 100 + 1 =$$

$$= \frac{9\cdot10^{2k+8} + 9\cdot10^{2k+6} + 10^{2k+5} - 10^4 + 900 + 9}{9} =$$

$$= \frac{10^{2k+5}\cdot9091 - 9091}{9} = 9091\cdot\underbrace{11\ldots1}_{2k+5}.$$

Аналогично преобразуется знаменатель.

31. $18n$. $\left(10^n-1\right)^3 = 10^{3n} - 3\cdot10^{2n} + 3\cdot10^n - 1 =$

$$= \underbrace{99\ldots9}_{n-1}7\underbrace{00\ldots0}_{n-1}2\underbrace{99\ldots9}_{n}.$$

32. а) 2802; б) $45n\cdot10^{n-1}+1$. Подсчитаем сумму цифр множества всех целых чисел от 0 до $\underbrace{99\ldots9}_{n\ \text{цифр}}$. Для этого выпишем их все подряд по порядку и рассмотрим пары чисел, равноотстоящих от начала и конца записи: $(0;\underbrace{99\ldots9}_{n\ \text{цифр}})$ – первая пара, $(1;\underbrace{99\ldots9}_{n\ \text{цифр}}8)$ – вторая, …, $(4\underbrace{99\ldots9}_{n-1\ \text{цифр}};5\underbrace{00\ldots0}_{n-1\ \text{цифр}})$ – последняя пара. Сумма цифр чисел каждой пары в любом разряде одна и та же – она равна 9, разрядов всего n, так что сумма цифр чисел одной пары равна $9n$, а количество пар равно половине количества рассматриваемых чисел, т.е. $5\cdot10^{n-1}$.

Таким образом, сумма цифр всех целых чисел от 0 до $\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ цифр}}$ равна $45n\cdot10^{n-1}$. Теперь легко решить обе части задачи.

33. а) $2^{2003}-1$ цифра; б) $9\cdot2^{2002}$. Умножим число $A=\overline{a_1\ldots a_k}$, где $a_1,\ldots,a_k\neq0$ – цифры, на $\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ цифр}}$, $n\geq k$. Имеем

$$B=A\left(10^n-1\right)=A\cdot10^n-A=\overline{a_1\ldots a_k\,\underbrace{00\ldots0}_{n}}-\overline{a_1\ldots a_k}\,.$$

Выполняя вычитание «столбиком», получим

$$B=A\left(10^n-1\right)=\overline{a_1\ldots(a_k-1)\,\underbrace{99\ldots9}_{n-k}(9-a_1)(9-a_2)(10-a_k)}\,.$$

Это число $(n+k)$-значно, а сумма цифр его равна $9n$. Поэтому количество цифр в десятичной записи произведения равно

$$1+2+2^2+\ldots+2^{2002}=2^{2003}-1\,,$$

а сумма цифр равна $9\cdot2^{2002}$.

34. а) Не существует, так как число 1994 при делении на 9 дает остаток 5.

б) Существует. Для числа вида $n=9k+4$ сумма цифр числа $\left(10^k-3\right)^2$ в точности равна n.

Выбор такого числа обусловлен сравнительной простотой вычисления суммы цифр:

$$\left(10^k-3\right)^2=10^{2k}-6\cdot10^k+9=\underbrace{99\ldots9}_{k-1}4\underbrace{00\ldots0}_{k-1}9\,.$$

Ясно, что сумма цифр равна $9k+4$. Для $n=1993$ число $k=221$.

35. 27. Пусть рассыпанное число равно a^6. Поскольку сумма цифр числа a^6, равная 45, делится на 9, то и само число a^6 делится на 9. Значит, число a делится на 3.

Так как a^6 – девятизначное число, а $2^6=64$, получаем: $20^6=64000000<a^6$. С другой стороны, $32^6=2^{30}=\left(2^{10}\right)^3=$ $=1024^3>1000^3=10^9>a^6$. Итак, $20^6<a^6<32^6$, но $a^6\neq30^6$, так как в числе 30^6 шесть нулей, а у нас всего один нуль. Остались три кандидата: $a=21$; $a=24$; $a=27$.

Но число 21^7 оканчивается на 1, а такой цифры у нас нет.

Число 24^6, как легко понять, возводя последовательно число 4 в натуральную степень, оканчивается на 6, что в нашем случае невозможно. Остается лишь число 27.

Замечание. Поскольку в условии сказано, что рассыпана шестая степень числа, нет необходимости проверить цифровой состав числа 27^6.

36. а) Поскольку 53 + 96 = 83 + 66 = 109 + 40 = 149, данное число делится на 149.

б) $16016003+1=4002^2$.

в) Пусть a = 20. Данное число равно

$$a^7+a^2+1=\left(a^2+a+1\right)\left(\left(a^3+1\right)\left(a^2-a\right)+1\right).$$

г) $2^{10}+5^{12}=\left(2^5\right)^2+2\cdot2^5\cdot5^6+\left(5^6\right)^2-2\cdot2^5\cdot5^6=$
$=\left(2^5+5^6\right)^2-\left(2^3\cdot5^3\right)^2$.

д) Если $x=5^{25}$, то $\dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}=x^4+x^3+x^2+x+1=$
$=\left(x^2+3x+1\right)^2-5x\left(x+1\right)^2$. При $x=5^{25}$ последнее выражение является разностью двух квадратов натуральных чисел.

37. Делится. Если $x=2^{50}$, то

$$2^{202}+1=4x^4+1=4x^4+4x^2+1-4x^2=$$
$$=\left(2x^2+2x+1\right)\left(2x^2-2x+1\right),$$

но $2x^2+2x+1=2^{101}+2^{51}+1$.

38. а) Нельзя. В сумму будет входить число $\pm\dfrac{1}{8}$. Если сумма всех остальных чисел $\dfrac{p}{q}$, то $\dfrac{p}{q}\pm\dfrac{1}{8}=\dfrac{r}{s}$, где S делится на 8, r – нечетно (число q содержит двойку не более чем во второй степени).

б) Следует выкинуть все дроби, знаменатели которых делятся на 5, 7, 8, 9, 11, т.е. 6 чисел. Для оставшихся чисел требуемая расстановка знаков возможна: $1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{12}=0$.

39. а) 0; б) $-p-q$; в) 0.

40. а) Можно. Например, последовательность $\{a_k\}$, где $a_k=\dfrac{k}{2000!}$, а k = 1, 2, ..., 2000, – арифметическая прогрессия. Действительно,

$$d=a_{k+1}-a_k=\frac{k+1}{2000!}-\frac{k}{2000!}=\frac{1}{2000!}=\text{const}.$$

б) Нет.

В арифметической прогрессии $a_{n+1}-a_n=d$ − постоянная величина. Но в бесконечной последовательности вида $\frac{1}{n_k}$ разность соседних членов $\frac{1}{n_k}-\frac{1}{n_{k+1}}$ стремится к нулю.

41. $\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}}$.

42. а) $\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$.

$$1+11+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n}=\frac{1}{9}\left(10-1+10^2-1+\ldots+10^n-1\right).$$

б) $\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$. Пусть $S_n(x)$ − искомая сумма. Вычислите разность $xS_n(x)-S_n(x)$.

43. $1-\frac{1}{2}+\ldots-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=$
$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

44. $\frac{2n+2}{n+2}$. Воспользуйтесь тем, что $1+\frac{1}{k(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$.

45. $\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{2^{101}}}$. $\frac{\left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^1}+1\right)\ldots\left(2^{2^k}+1\right)}{2^{2^{k+2}}}=$

$$=\frac{\left(2^{2^0}-1\right)\left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^1}+1\right)\ldots\left(2^{2^k}+1\right)}{2^{2^{k+2}}}=\frac{2^{2^{k+1}}-1}{2^{2^{k+2}}}=\frac{1}{2^{2^{k+1}}}-\frac{1}{2^{2^{k+2}}}.$$

46. 1. Исходное выражение равно

$$\frac{1}{1+1/(1+x)}+\frac{1}{2+x}=\frac{1+x}{2+x}+\frac{1}{2+x}=1,$$

где x − дробь в знаменателе второго слагаемого.

47. а) $\frac{\sin nx\sin(n+1)x}{\sin\frac{x}{2}}$. Пусть

$$S_n(x)=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx.$$

Тогда

$$\sin\frac{x}{2}S_n(x)=\sin\frac{x}{2}\sin x+\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2x}{2}+\ldots+\sin\frac{x}{2}\sin nx=$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \ldots + \cos\left(nx - \frac{x}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right) = \sin nx \cdot \sin(n+1)x\,.$$

б) $\dfrac{\sin(n+1)x\cos nx}{\sin\dfrac{x}{2}}$. Пусть $C_n(x)$ – искомая сумма. Преобразуйте $\sin\dfrac{x}{2}C_n(x)$, как в пункте а).

в) $\dfrac{\sin nx}{\sin x\cos x\cos(n+1)x}$.

$$\frac{1}{\cos kx\cos(k+1)x} = \frac{1}{\sin x}\left(\operatorname{tg}(k+1)x - \operatorname{tg}kx\right).$$

48. Если $a = 2^n$ и $\dfrac{2^n - 2}{n} = m$, то

$$\frac{2^{2^n-1} - 2}{2^n - 1} = \frac{2\left(a^m - 1\right)}{a - 1} = 2\left(a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots + 1\right).$$

49. а) Это прогрессия 1, 25, 49. б) Возьмем прогрессию 1, 25, 49, 73 и умножим все ее члены на 73^2. Получается прогрессия $73^2, (5\cdot 73)^2, (7\cdot 73)^2, (73)^3$, удовлетворяющая условию.

в) Если уже построена n-членная прогрессия, состоящая из степеней натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, возьмем следующий член этой прогрессии a_{n+1} и умножим все члены этой $(n+1)$-членной прогрессии на a_{n+1}^k, где k – наименьшее общее кратное всех степеней, встречающихся в числах $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Получается $(n+1)$-членная прогрессия, состоящая из степеней натуральных чисел.

г) Предположим, что существует бесконечная прогрессия, состоящая из степеней натуральных чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$. Легко видеть, что $a_n \geq n^2$. Рассмотрим сумму обратных величин членов этой прогрессии $S_n = \dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$. Ясно, что

$$S_n \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2\,.$$

Итак, сумма S_n ограничена. Однако для любой прогрессии $a_n = a + dn$ $(a > 0,\ d > 0)$. Сумма $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$ становится сколь угодно большой при достаточно больших n. В самом деле, $a_n \le (a+d)n$, т.е. $\frac{1}{a_n} \ge \frac{c}{n}$, где $c = \frac{1}{a+d} > 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \ge c\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Из задачи 71, в) следует, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^k} > \frac{k}{2}$, т.е. при достаточно большом k она больше любого наперед заданного числа.

50. Может. Если $S_{m,n}$ − сумма нечетных чисел от m до n, то $S_{m,n} = \frac{(n-m+2)(m+n)}{4}$. Можно подобрать m и n так, чтобы выполнялись равенства $n - m + 2 = 2 \cdot 1993$, $m + n = 2 \cdot 1993^{1992}$.

51. а) Можно; б) можно; в) нельзя.

Заметим, что $a^2 - (a+1)^2 - (a+2)^2 + (a+3)^2 = 4$ при любом a. Поэтому сумма $a^2 - (a+1)^2 - (a+2)^2 + (a+3)^2 - (a+4)^2 + (a+5)^2 + (a+6)^2 - (a+7)^2 = 0$. Итак, расставляя знаки между любыми восемью последовательными квадратами таким образом: + − − + − + + −, мы получим нулевую сумму. Осталось разбить на восьмерки числа от 0 до 1999^2 для пункта а) и числа $1^2, 2^2, \ldots, 2000^2$ для пункта б).

в) Так как сумма $1^2 + 2^2 + \ldots + 2000^2$ нечетна, то при любой расстановке знаков сумма $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm 2001^2$ будет нечетной.

52. а) Можно; б) можно; в) нельзя. а), б) Убедитесь в том, что расстановка знаков + − − + − + + − − + + − + − − + перед кубами любых 16 последовательных целых чисел дает нулевую сумму. В случае а) разбиваем числа $0^3, 1^3, 2^3, \ldots, 1999^3$ на группы по 16 последовательных кубов, в случае б) − начиная с 1. в) Сумма кубов $1^3 + 2^3 + \ldots + 2001^3$ нечетна. Поэтому нечетна и любая сумма вида $\pm 1^3 \pm 2^3 \pm \ldots \pm 2001^3$.

53. 3994. После замены $t = x^2 + 2x$ получаем уравнение $t^2 - 1993t + 1995 = 0$. Пусть t_1 и t_2 − корни этого уравнения. Пользуясь теоремой Виета, подсчитайте суммы квадратов корней уравнений $x^2 + 2x = t_1$ и $x^2 + 2x = t_2$.