жим в обе стороны от вершин по отрезку, равному длине стороны треугольника, лежащей на этой прямой, получим шесть точек (рис.16). Соединим их так, чтобы получился выпуклый шестиугольник. Выразите площадь полученного шестиугольника через площадь S исходного треугольника.

415. Даны два смежных прямых угла с вершиной в точке O (рис.17). В один из них вписана окружность радиуса r, а в другой – окружность радиуса R $(R > r)$. Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает стороны углов в точках A и B. Определите площадь треугольника AOB.

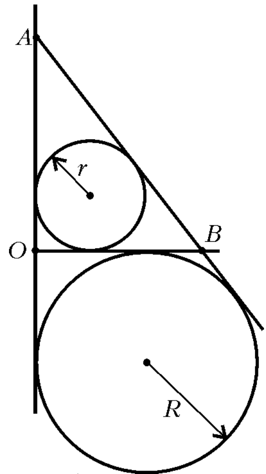

Рис. 17

416. Стороны AB, BC и CA треугольника ABC разделены точками C', A' и B' в одном и том же отношении k (рис.18). Найдите k, если прямые AA', BB' и CC' ограничивают треугольник, площадь которого составляет $\frac{1}{4}$ площади данного.

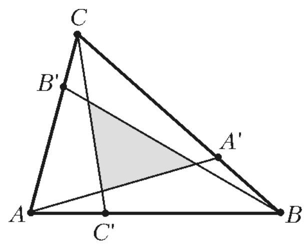

Рис. 18

417. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты, расположенные вне треугольника. Вычислите площадь шестиугольника, образованного теми вершинами квадратов, которые не являются вершинами треугольника, если известны гипотенуза c и сумма s катетов треугольника.

418. Из двух углов треугольника один в два раза больше другого. Найдите стороны треугольника, зная, что они выражаются целыми числами.

419. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника (рис.19). Известно, что площади этих треугольников выражаются целыми числами. Докажите, что произведение этих четырех чисел не

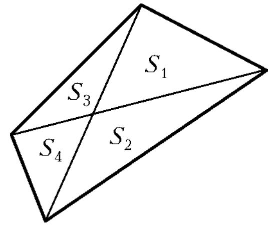

Рис. 19

может оканчиваться цифрами ...1965.

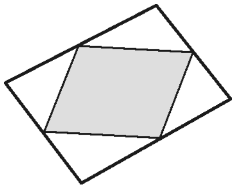

Рис. 20

420. В треугольнике ABC с углом 120° при вершине C проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Найдите величину угла $A_1B_1C_1$.

421. Дан выпуклый четырехугольник. Середины его сторон последовательно соединены отрезками (рис.20). Выразите площадь полученного четырехугольника через площадь данного.

Задачи на доказательство: прямые и многоугольники

422. В равносторонний треугольник вписан другой равносторонний треугольник, стороны которого перпендикулярны сторонам данного (рис.21). В каком отношении вершины вписанного треугольника делят стороны данного?

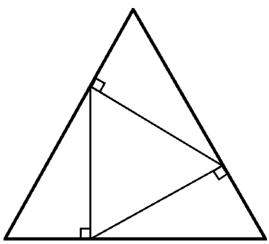

Рис. 21

423. Дан четырехугольник $ABCD$, причем известно, что периметры треугольников ABC, ABD и BCD равны. Докажите, что $ABCD$ – прямоугольник.

424. Докажите, что если площади прямоугольных треугольников относятся как квадраты длин их гипотенуз, то треугольники подобны.

425. Докажите, что если разность между суммой длин двух сторон треугольника и длиной его третьей стороны равна диаметру вписанной окружности, то треугольник прямоугольный.

426. Докажите, что прямая, соединяющая вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, построенного на гипотенузе вне треугольника, делит прямой угол пополам (рис.22).

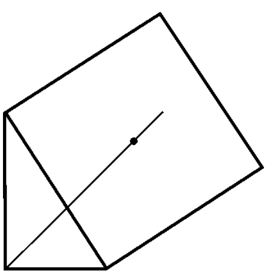

Рис. 22

427. В прямоугольник $ABCD$ вписан равносторонний треугольник APK, так что вершина K находится на стороне BC, а P – на CD (рис.23). В треугольнике APK из вершины K проведена высота KH. Докажите, что треугольник BHC равносторонний.

428. В треугольник ABC вписано три квадрата: у одного две вершины лежат на стороне AB, у другого – на стороне BC, у третьего – на стороне AC. Оказалось, что все три квадрата равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

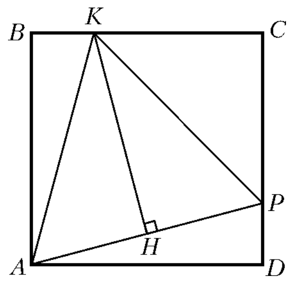

Рис. 23

429. На двух смежных сторонах параллелограмма вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что третьи вершины этих треугольников и четвертая вершина параллелограмма являются вершинами равностороннего треугольника.

430. Докажите, что если прямая, проходящая через вершину треугольника, разбивает его на два треугольника, подобных данному, то данный треугольник прямоугольный, а проведенная прямая перпендикулярна гипотенузе.

431. В окружность вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали одной трапеции равны по длине диагоналям другой.

432. Через точку, взятую на продолжении диагонали трапеции, и середины оснований проведены две прямые, пересекающие боковые стороны трапеции в точках K и L (рис.24). Докажите, что отрезок KL параллелен основаниям трапеции.

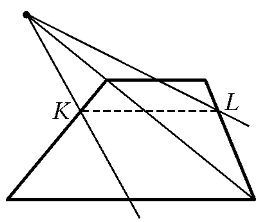

Рис. 24

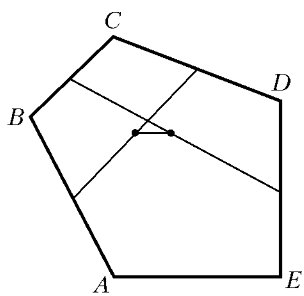

Рис. 25

433. Середины сторон AB и CD, BC и DE выпуклого пятиугольника соединены отрезками. Середины полученных отрезков снова соединены (рис.25). Докажите, что последний отрезок параллелен отрезку AE и равен по длине $\frac{1}{4}AE$.

434. Через точки пересечения двух окружностей проведены две произвольные секущие. Докажите, что хорды, соединяющие другие точки пересечения этих секущих с окружностями, параллельны (рис.26).

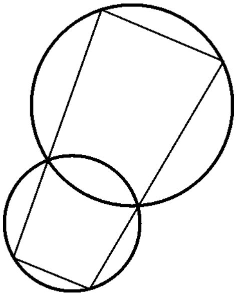

Рис. 26

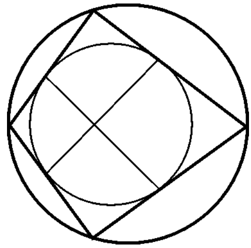

Рис. 27

435. Через середины диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены прямые, параллельные BD и AC соответственно. Точка их пересечения соединена с серединами сторон четырехугольника. Докажите, что этими четырьмя отрезками данный четырехугольник делится на равновеликие части.

436. Некоторый четырехугольник является одновременно вписанным и описанным. Докажите, что прямые, соединяющие противоположные точки касания вписанной окружности, перпендикулярны (рис.27).

Задачи на доказательство: окружности

437. Докажите, что прямые, соединяющие середины дуг стягиваемых противолежащими сторонами вписанного в окружность четырехугольника, взаимно перпендикулярны.

438. Соедините все вершины произвольного выпуклого четырехугольника с серединами двух противоположных его сторон. Докажите, что площадь образовавшегося при этом четырехугольника равна сумме площадей двух не примыкающих к нему треугольников.

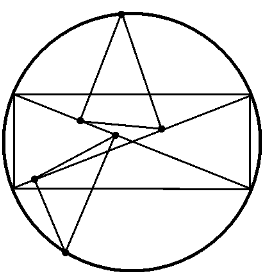

Рис. 28

439. Из произвольной точки окружности, описанной вокруг прямоугольника, опущены перпендикуляры на диагонали прямоугольника или их продолжения (рис.28). Докажите, что расстояние между основаниями перпендикуляров не зависит от положения точки на окружности.

440. Из точки P, лежащей вне данной окружности, проведены касательные PT_1 и PT_2 (T_1 и T_2 – точки касания). Внутри окружности построена дуга T_1T_2 с центром в точке P (рис.29). Произвольная точка A этой дуги соединена с точками T_1 и T_2. Докажите, что точки M_1 и M_2, в которых прямые AT_1 и AT_2 второй раз пересекают окружность, диаметрально противоположны.

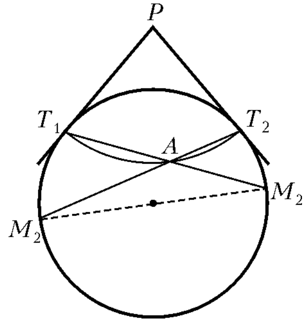

Рис. 29

441. В окружность вписан четырехугольник. Докажите, что для всякой точки этой окружности произведение расстояний до одной пары противоположных сторон четырехугольника равно произведению расстояний до другой пары сторон, а также произведению расстояний до диагоналей.

442. Докажите, что если в трапеции диагонали перпендикулярны, то сумма квадратов длин диагоналей равна квадрату суммы длин оснований.

443. Три окружности проходят через точки A и B. Через точку A проведена произвольная секущая, пересекающая окружности вторично в точках C, D и E (рис. 30). Докажите, что отношение $CD : DE$ не зависит от выбора секущей.

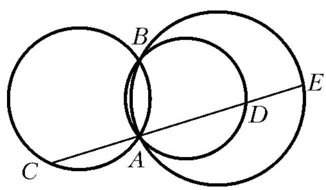

Рис. 30

444. Через некоторую точку M диаметра окружности проведена секущая под углом 45° к диаметру. Пусть A и B – точки пересечения секущей с окружностью. Докажите, что $MA^2 + MB^2$ не зависит от выбора точки M.

445. В окружности проведены три равные хорды AB, BC и CD. Докажите, что диаметр BE отсекает от хорды AD отрезок AF, равный AB, а хорда CE делит отрезок FD пополам.

446°. На луче, проведенном через центр окружности радиуса r, выбраны точки A и B так, что произведение расстояний от них до центра окружности равно r^2. Докажите, что для любой точки P окружности отношение $AP : BP$ постоянно.

447. Точки K и P симметричны основанию высоты BH треугольника ABC относительно его сторон AB и BC (рис.31). Докажите, что точки пересечения отрезка KP со сторонами AB и BC или их продолжениями – основания высот треугольника ABC.

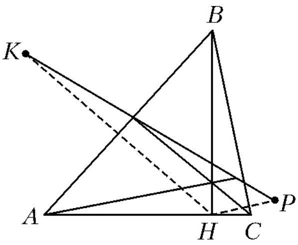

Рис. 31

448. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD. Обозначим через M одну из точек пересечения прямой AC и описанной окружности треугольника BCD (любую). Докажите, что BD – общая внешняя касательная к описанным окружностям треугольников AMB и AMD.

449. Про совокупность равнобедренных треугольников известно, что их основания лежат на данной прямой, они имеют общую вершину A на этой прямой, кроме того, радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны (рис.32). Докажите, что все боковые стороны этих треугольников, не проходящие через вершину A, касаются одной окружности.

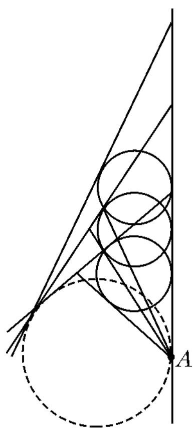

Рис. 32

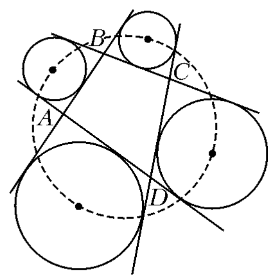

Рис. 33

450. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Построены четыре окружности, каждая из которых касается извне одной стороны и продолжений двух соседних сторон четырехугольника (например, стороны AB и продолжений сторон AD и BC, рис.33). Докажите, что центры этих окружностей лежат на одной окружности.

451. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P – вне этой прямой. Обозначим через O_1, O_2 и O_3 центры окружностей, описанных около треугольников PBA, PCA и PBC. Докажите, что точки O_1, O_2, O_3 и P лежат на одной окружности.

452. Три окружности α_1, α_2 и α_3 пересекаются в одной точке O. Точки A, B и C – точки пересечения, соответственно, окружностей α_1 и α_2, α_2 и α_3, α_3 и α_1. Из произвольной точки M окружности α_1 проведены секущие MAP и MCQ (P и

Q – точки, соответственно, на α_2 и α_3). Докажите, что точки P, B и Q лежат на одной прямой.

453. Через вершины C, B и центр вписанной в треугольник ABC окружности проведена окружность с центром в точке M. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, и биссектриса угла A проходят через точку M.

454. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка P, а на стороне BC – точка K. На отрезках AK и CP как на диаметрах построены окружности. Докажите, что их общая хорда проходит через точку пересечения высот треугольника ABC.

455. В одном архиве найдена записка с описанием места, где спрятан ящик со старинными рукописями. В записке говорится: «Подойдите к березе и идите от нее до дуба, измеряя расстояние. Около дуба поверните направо и пройдите такое же расстояние. Пусть M – точка остановки. Затем снова от березы идите до каменного столба, от которого пройдете влево такое же расстояние. В результате остановитесь в точке K. В середине отрезка MK закопан ящик с рукописями». Когда историки прибыли на указанное место, то обнаружили, что березы уже нет. Как найти ящик с рукописями?

456. В квадрате расположено несколько одинаковых кругов. Любые два из них не имеют общих точек. Докажите, что можно разрезать квадрат на выпуклые многоугольники так, чтобы каждый многоугольник заключал в себе ровно по одному кругу. Верно ли такое утверждение, если вместо кругов рассматриваются равные между собой треугольники? если радиусы кругов не одинаковы?

457. Торт имеет форму правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Из середины каждой стороны внутрь торта (в произвольном направлении) проводится разрез длины 1. Докажите, что при этом от торта будет отрезан хотя бы один кусок.

Стереометрия

458. В пространстве даны два треугольника ABC и $A'B'C'$, лежащие в разных плоскостях. Найдите геометрическое место точек M, для которых объемы тетраэдров $MABC$ и $MA'B'C'$ равны.

459°. Докажите, что три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

460. Можно ли построить тетраэдр, в котором каждое ребро было бы стороной тупого или прямого плоского угла?

461. Докажите, что для параллелепипеда, у которого нет плоских прямых углов, имеет место одно из двух: или в некоторой вершине сходятся три плоских острых угла, или в некоторой вершине сходятся три плоских тупых угла.

462. Какое наибольшее число ребер правильной n-угольной пирамиды можно пересечь плоскостью? Тот же вопрос для правильной n-угольной призмы.

463. Докажите, что не существует многогранника, имеющего 7 ребер. Постройте пример многогранника, имеющего n ребер, для $n \geq 8$.

464°. Некоторая плоскость пересекает все звенья замкнутой ломаной линии $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ в точках $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Докажите, что

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \ldots \cdot \frac{A_nB_n}{B_nA_1} = 1.$$

465. Пространственный четырехугольник описан около сферы (каждая сторона касается сферы). Докажите, что

а) суммы его противоположных сторон равны;

б) точки касания сторон со сферой лежат в одной плоскости.

466. а) На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и L соответственно, P – точка пересечения диагонали AC и отрезка KL. Найдите AP/AC, если $\dfrac{AK}{AB} = \alpha$, $\dfrac{AL}{AD} = \beta$.

б) На ребрах AA', AB и AD параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки K, L и M соответственно, P – точка пересечения диагонали AC' с плоскостью KLM. Найдите $\dfrac{AP}{AC'}$, если $\dfrac{AK}{AA'} = \alpha$, $\dfrac{AL}{AB} = \beta$, $\dfrac{AM}{AD} = \gamma$.

467. Докажите, что следующие свойства тетраэдра[1] равносильны:

а) его грани – равные остроугольные треугольники;

б) периметры всех граней равны;

в) суммы плоских углов при каждой вершине равны 180°;

г) центры вписанной и описанной сфер совпадают;

д) отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, перпендикулярны;

е*) площади всех граней равны.

[1] Рассматриваемые в этой задаче тетраэдры называются ортогональными.

468. Дана плоскость и две точки A и B вне ее. Найдите геометрическое место точек M на плоскости, для которых отрезки AM и BM составляют с плоскостью одинаковые углы.

469°. а) Докажите, что если любые две из нескольких прямых пространства пересекаются, то либо все прямые лежат в одной плоскости, либо проходят через одну точку.

б) Докажите, что если любые две из нескольких окружностей в пространстве имеют 2 общие точки, то они либо проходят через 2 фиксированные точки, либо лежат в одной плоскости, либо лежат на одной сфере.

470. Докажите, что следующие свойства тетраэдра[1] эквивалентны:

а) его высоты пересекаются в одной точке;

б) противоположные ребра перпендикулярны;

в) суммы квадратов противоположных ребер равны;

г) основанием одной из высот служит ортоцентр грани, на которую высота опущена;

д*) могут ли все грани ортогонального тетраэдра быть тупоугольными треугольниками?

471. Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 1 : 3, считая от грани.

472°. Докажите, что площадь проекции многоугольника на горизонтальную плоскость равна $S\cos\alpha$, где S – его площадь, α – угол, под которым наклонена его плоскость к горизонтальной плоскости.

473*. Как нужно расположить в пространстве прямоугольный параллелепипед, чтобы площадь его проекции на горизонтальную плоскость была наибольшей?

474*. Докажите, что площадь проекции произвольного тетраэдра на горизонтальную плоскость будет максимальной в одном из следующих 7 положений: или одна из 4 граней горизонтальна, или одна из 3 пар противоположных ребер горизонтальна. Какой случай имеет место для правильной треугольной пирамиды с ребром основания a и боковым ребром b?

475. Определите полную поверхность призмы, описанной около шара, если площадь ее основания равна S.

476. Внутри шара отмечена точка. Через эту точку произвольным образом проводятся три взаимно перпендикулярные плоскости, которые пересекают шар по трем кругам. Докажите, что сумма площадей этих трех кругов для данной точки постоянна.

477*. а) Докажите, что для того чтобы существовал шар, касающийся всех ребер тетраэдра $ABCD$, необходимо и достаточно условие

$$AB + CD = AC + BD = BC + AD.$$

б) Чем заменятся это условие, когда шар касается трех ребер одной грани и продолжений трех других ребер?

в) Для каких тетраэдров существуют два шара типа б), соответствующие двум равным граням? Для каких тетраэдров существуют шар а) и один из шаров б)?

г) Докажите, что если существует шар а) и два шара б), то тетраэдр правильный и существуют все пять шаров: а) и четыре шара б).

478. Докажите, что любой выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

479*. Сколько может существовать сфер, касающихся всех плоскостей граней тетраэдра? Укажите все возможности.

480*. Несколько граней выпуклого белого многогранника покрашены в черный цвет так, что никакие две черные грани не имеют общего ребра. Докажите, что в многогранник нельзя вписать шар, если

а) сумма площадей черных граней больше суммы площадей белых граней;

б) черных граней больше, чем белых граней.