Расположение точек и фигур

323. Белую плоскость испачкали черной краской (тем самым все точки плоскости разбиты на два непустых множества – «черные» и «белые»).

а) Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1966 м.

б) Докажите, что найдутся две точки разного цвета, расстояние между которыми равно 1966 м.

324. Найдите все числа, которые можно поставить на место многоточия, чтобы следующая задача имела единственное решение: «На плоскости расположены несколько прямых, причем известно, что они пересекаются ровно в … точках. Найдите число прямых».

325. Город состоит из 50 кварталов, каждый из которых имеет периметр 600 м. По внешним сторонам кварталов проходит кольцевое шоссе. Турист обошел город по этому шоссе за полтора часа и прочел в справочнике, что суммарная длина всех улиц города, не считая шоссе, составляет 12 км. С какой скоростью шел турист?

326. Докажите, что при $n \geq 5$ данный прямоугольник можно разбить на n прямоугольников, так чтобы никакие два соседних прямоугольника разбиения не образовывали вместе прямоугольника.

327*. Докажите, что семь прямых и семь точек нельзя расположить на плоскости так, чтобы через каждую точку проходили ровно три прямые и на каждой прямой лежали ровно три точки.

328°. Докажите, что из куска проволоки длиной 120 см нельзя, не разламывая его, сделать каркас куба с ребром длиной 10 см.

329. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу пешком. Поужинав в кафе на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал, и при этом идти только по тем улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажите, что он сможет это сделать.

330. В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из каждого города можно проехать в любой другой, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

331. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость четыре окружности? n окружностей?

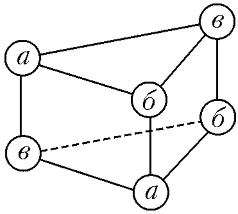

Рис.6

332. Какое наименьшее количество различных букв достаточно расставить в вершинах n-угольной призмы, чтобы в концах каждого ребра стояли разные буквы (рис.6)? Тот же вопрос для n-угольной пирамиды.

333. Стороны выпуклого n-угольника последовательно пронумерованы числами от 1 до n. Внутри этого n-угольника берется точка и соединяется с каждой вершиной отрезком. Нужно пронумеровать эти отрезки числами от 1 до n, так чтобы сумма номеров сторон для всех n треугольников, на которые разбит многоугольник, была одна и та же. Докажите, что это можно сделать тогда и только тогда, когда нечетно.

334. На окружности даны 1966 точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{1966}$. Составляются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, для которых точка A_1 является вершиной, или тех, для которых она вершиной не является?

335. Окружность покрыта несколькими дугами. Эти дуги могут накладываться друг на друга, но ни одна из них не покрывает окружность целиком. Докажите, что всегда можно выбрать несколько из этих дуг, так чтобы они тоже покрывали всю окружность и в сумме составляли не больше $720°$.

336. Из точки O на плоскости проведены несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Докажите, что можно выбрать несколько векторов, так что длина их суммы больше 1.

337. а) Требуется построить замкнутую самопересекающуюся ломаную линию, которая каждое свое звено пересекает один раз. Докажите, что такая ломаная обязательно имеет четное число звеньев. Для четных $n \geq 6$ постройте примеры.

б) Докажите, что для любого нечетного $n \geq 5$ существует самопересекающаяся замкнутая ломаная линия из n звеньев, которая пересекает каждое свое звено ровно два раза.

338. В лесу, имеющем форму выпуклой фигуры площади S, заблудился человек. Докажите, что он сможет выйти из леса, пройдя путь, не больший чем $\sqrt{2\pi S}$. Другими словами, докажите, что существует линия длины $\sqrt{2\pi S}$, которую нельзя поместить целиком ни в какую выпуклую фигуру площади S.

339. Внутри квадрата отмечены 1965 точек, так что никакие три из этих точек и вершин квадратов не лежат на одной прямой. Провели несколько разрезов, соединяющих эти точки между собой и с вершинами квадратов. Оказалось, что весь квадрат разбит на треугольники, внутри которых нет данных точек. Сколько проведено разрезов и сколько получилось треугольников?

340. На плоскости расположены несколько точек, все расстояния между которыми различны. Каждую точку соединяют отрезком с ближайшей. а) Может ли при этом получиться замкнутый многоугольник? б) Могут ли получиться пересекающиеся отрезки?

341. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

342. В квадрате со стороной 1 выбраны 102 точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого меньше чем 0,01.

343. Можно ли разместить 1963 точки в квадрате со стороной 1 так, чтобы любой прямоугольник, лежащий внутри заданного квадрата, площади $\frac{1}{200}$ и со сторонами, параллельными сторонам квадрата, содержал внутри себя хотя бы одну из этих точек?

344*. В квадрат со стороной 1 бросили 51 точку. Докажите, что некоторые три из этих точек обязательно оказались внутри некоторого круга радиуса $\frac{1}{7}$.

345*. n точек на плоскости расположены так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

346. На плоскости даны 100 точек. Докажите, что их можно заключить в несколько непересекающихся кругов, сумма диаметров которых меньше 100 и расстояние между любыми двумя из которых больше 1. (Расстояние между двумя непересекающимися кругами – это расстояние между их ближайшими точками.)

347. На плоскости отмечены n точек. Известно, что среди любых трех из них имеются две, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что на плоскости можно разместить два круга радиуса 1, которые закроют все эти точки.

348. Можно ли отметить на плоскости 225 точек так, чтобы наибольшее из расстояний между ними было не больше 21, а наименьшее – не меньше 3?

349. n круглых монет радиуса r целиком (не свешиваясь) лежат на круглом столе радиуса R без наложений, так что больше нельзя положить ни одной монеты. Докажите, что

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right) < \sqrt{n} \le \frac{R}{r}.$$

Движение и преследование

350. По прямолинейному желобу длиной 1 м, закрытому с обоих концов, катаются 100 маленьких абсолютно упругих шариков. Скорость каждого шарика – 100 м/с. Сколько будет столкновений в течение одной секунды? (Трением пренебречь; шарики считать точками, двигающимися по одной прямой, начальное расположение которых не задано.)

351. По аллее длиной 100 м прогуливаются три джентльмена. Первый ходит со скоростью 1 км/ч; второй – со скоростью 2 км/ч, третий – со скоростью 3 км/ч. Дойдя до конца аллеи, каждый поворачивается и идет с прежней скоростью в обратном направлении. Докажите, что можно выбрать такой промежуток времени продолжительностью в одну минуту, в течение которого все трое будут идти в одном и том же направлении.

352. По четырем прямым дорогам, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, равномерно каждый со своей скоростью идут четыре пешехода. Известно, что первый пешеход встретится со вторым, с третьим и с четвертым, а второй – с третьим и с четвертым. Докажите, что третий и четвертый пешеходы тоже встретятся друг с другом.

353. Улитка ползла с непостоянной скоростью. В течение шести минут несколько человек наблюдали за ней, так что ни в какой момент она не была без наблюдения. Каждый наблюдал ровно одну минуту и обнаружил, что за эту минуту улитка проползла ровно 1 м. Докажите, что за все шесть минут улитка могла проползти самое большее 10 м.

354. Самолет-разведчик летает по кругу с центром в точке A. Радиус круга – 10 км, скорость самолета – 1000 км/ч. В некоторый момент из точки A стартует ракета, которая имеет ту же скорость, что и самолет, и управляется так, что она все время находится на прямой, соединяющей самолет с точкой A. Через какое время ракета достигнет самолета?

355*. Между двумя параллельными дорогами, находящимися на расстоянии $3a$ друг от друга, стоит бесконечный ряд одинаковых домиков размером $a \times a$ на расстоянии $2a$ один от другого (рис.7). По одной из дорог с постоянной скоростью v и интервалом $9a$ двигается колонна полицейских. В тот момент, когда один из полицейских находится напротив одного из домиков (в точке A), по другую сторону от этого домика на второй дороге (в точке B) появляется гангстер. С какой постоянной скоростью и в каком направлении должен идти гангстер по своей дороге, чтобы скрываться от полицейских за домами?

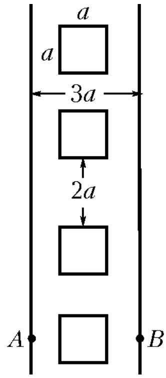

Рис.7

356*. На маленьком острове стоит прожектор, луч которого освещает некоторый отрезок поверхности моря, начинающийся у острова. Прожектор равномерно вращается вокруг вертикальной оси, так что конец его луча перемещается со скоростью v. Докажите, что катер, развивающий максимальную скорость $\frac{v}{8}$, не сможет незаметно (не попадая в луч прожектора) подойти к острову.

357*. К непрозрачной планете, имеющей форму шара, подлетает космический корабль, который может летать со скоростью v. Единственный житель планеты может передвигаться по ее поверхности со скоростью не более u. Докажите, что если $\frac{v}{u} > 10$, то корабль сможет обнаружить жителя, как бы тот ни пытался скрыться.

358. Ученик плавает в круглом бассейне. На краю бассейна стоит учитель, который не умеет плавать, но бегает в четыре раза быстрее, чем плавает ученик. Сможет ли ученик убежать от учителя, если он бегает быстрее, чем учитель?

* * *

359*. Из любой точки города в любую другую можно попасть, не проходя через любой наперед заданный перекресток. Докажите, что с любого перекрестка на любой другой ведут по крайней мере два не пересекающихся пути. (Предполагается, что в городе больше двух перекрестков.)

360*. С невыпуклым многоугольником проделываются следующие операции: если A и B – две его не соседние вершины и многоугольник лежит по одну сторону от прямой AB, то часть контура, лежащая между точками A и B, симметрично отражается относительно середины отрезка AB (рис.8). Докажите, что через конечное число таких операций многоугольник превратится в выпуклый.

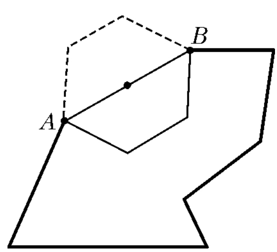

Рис.8

ГЛАВА 4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Задачи на построение

361. Разделите угол в 19° на 19 равных частей с помощью циркуля и линейки.

362. Разделите угол в $\frac{\pi}{7}$ на 3 равные части с помощью циркуля и линейки.

363. Постройте треугольник, если дана прямая, на которой лежит основание, и даны две точки, являющиеся основаниями высот, опущенных на боковые стороны.

364. Постройте треугольник, зная положение одной из его вершин, середины противоположной стороны и точки пересечения высот.

365. Даны прямая и две точки, лежащие по одну сторону от этой прямой. Постройте треугольник, основание которого лежит на данной прямой, а данные точки являются ортоцентром (точкой пересечения высот) и центром тяжести (точкой пересечения медиан).

366. Постройте треугольник, если известны длина медианы, проведенной к одной из его сторон, и длины высот, проведенных к двум другим сторонам.

367. Даны прямая и две точки, лежащие по разные стороны от прямой. Постройте треугольник, для которого данные точки были бы основаниями высот, а третья высота лежала бы на данной прямой.

368. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и медиане, проведенной к одному из катетов.

369. На доске была начерчена трапеция, в ней была проведена средняя линия EF и опущен перпендикуляр OK из точки O пересечения диагоналей на большее основание. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам EF и OK?

370. На одной из сторон треугольника отмечена точка A. Проведите через нее прямую, так чтобы она разделила площадь треугольника на две равные части.

371. Даны окружность, точка A, лежащая на окружности, и точка M, лежащая внутри окружности. Постройте на окружности точки B и C такие, чтобы точка M была а) точкой пересечения медиан треугольника ABC;

б) точкой пересечения биссектрис треугольника ABC;

в) точкой пересечения высот треугольника ABC.

372. Постройте треугольник по двум высотам, опущенным на две стороны, и биссектрисе, проведенной к третьей стороне.

373. Постройте четырехугольник по длинам его сторон, если известно, что его можно вписать в окружность.

374. На окружности отмечены три точки. Найдите на окружности четвертую точку, такую чтобы в четырехугольник с вершинами в этих точках можно было вписать окружность.

375. Даны окружность и внутри нее две точки A и B. Постройте вписанный в окружность прямоугольный треугольник, катеты которого проходят через точки A и B.

376. Постройте параллелограмм, две вершины которого лежат на одной данной окружности, две другие – на другой данной окружности, а точка пересечения диагоналей находится в данной точке.

377. На окружности даны точки A и B. Проведите хорду XY, так чтобы отношение $AX : AY$ и разность углов XAB и YAB имели заданные значения.

378. Через точки A и B проведите окружность, которая пересекла бы две данные параллельные прямые в точках E и F, так чтобы $EF = AB$ (рис.9).

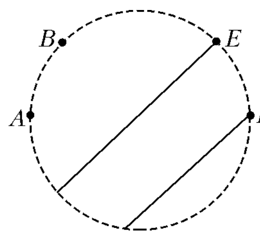

Рис. 9

379. В данную окружность впишите трапецию, если известна длина ее боковой стороны и расстояние от центра до точки пересечения диагоналей.

Геометрические места точек

380. На плоскости нарисован квадрат. Найдите геометрическое место точек, таких что расстояния от каждой из них до прямых, содержащих стороны квадрата, взятые в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию.

381. По внутренней стороне окружности катится окружность вдвое меньшего радиуса (рис.10). На меньшей окружности отмечена точка A. По какой траектории она движется?

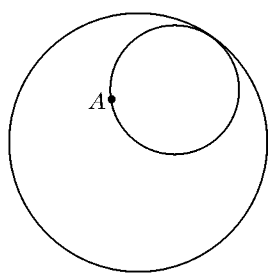

Рис. 10

382. Дан равносторонний треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M таких, что треугольники ABM и ACM оба равнобедренные.

383. Из данной точки M квадратного бильярда выпускается шарик параллельно одной из диагоналей. Найдите геометрическое место точек P на бильярде таких, что шарик, выпущенный из точки P одновременно с первым шариком со скоростью равной по величине и направлению скорости первого, столкнется с ним.

Неравенства и экстремумы

384. Дана окружность и на ней точка A. Произвольная окружность с центром A пересекается с данной окружностью в точках K и P и касается диаметра данной окружности в точке H (рис.11). Найдите геометрическое место точек пересечения отрезков KP и AH.

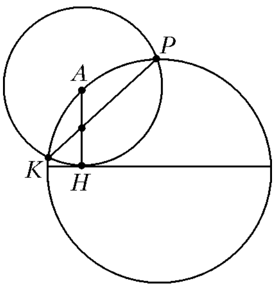

Рис. 11

385. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Докажите, что

а) $AB + CD < AC + BD$;

б) если $AB + BD \le AC + CD$, то $AB < AC$.

386. Могут ли все высоты треугольника быть меньше 1 см, а его площадь больше 10000 км^2?

387. D и E – середины сторон AB и BC треугольника ABC. Точка M лежит на стороне AC. Докажите, что если $MD < AD$, то $ME > CE$.

388. Даны три точки A, B, C. Где нужно выбрать точку M, чтобы сумма радиусов окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM, была наименьшей?

389. На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC отложен отрезок $CD = BC$. Докажите, что угол ABD – тупой.

390. Докажите, что выпуклый четырехугольник, имеющий ось симметрии, является либо вписанным в окружность, либо описанным около окружности.

391. В четырехугольнике три тупых угла. Докажите, что из двух его диагоналей большей является та, которая проведена из вершины острого угла.

392. Докажите, что круги, построенные на сторонах произвольного четырехугольника как на диаметрах, целиком его накрывают.

393. Докажите, что площадь квадрата, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади этого треугольника.

394. Двумя отрезками длины 1 отрежьте от данного угла четырехугольник наибольшей площади (рис.12).

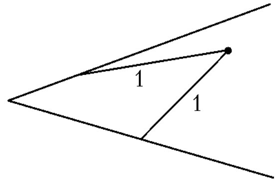

Рис. 12

395. Внутри окружности с центром в точке O дана точка A, отличная от O. Найдите на окружности точку M, для которой угол AMO максимален.

396. Какую наименьшую ширину должна иметь бесконечная полоса бумаги, чтобы из нее можно было вырезать любой треугольник площади 1?

397. На плоскости даны точки A и B. Постройте квадрат, у которого сумма расстояний от вершин до точки A была бы минимальной, а точки A и B лежали бы на его границе.

398. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC найдите точку M, для которой треугольник MCK (K – проекция точки M на катет BC) имеет наибольшую площадь.

399. В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M. Постройте треугольник MPK минимального периметра, так чтобы точка P лежала на стороне AB, а точка K – на стороне CA.

400. Дан треугольник, длины сторон которого различны. Найдите на плоскости точку, сумма расстояний от которой до сторон треугольника была бы минимальной.

401. Дан треугольник ABC. На продолжении сторон AB и AC за вершины B и C отмечены точки B' и C', такие что

$$BB' + CC' = BC$$

(рис.13). Для каких положений точек B' и C' длина отрезка $B'C'$ будет наименьшей?

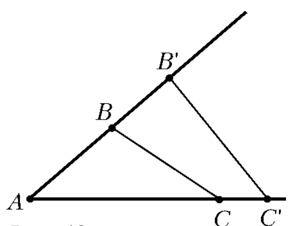

Рис. 13

402. Даны две концентрические окружности. Через точку, лежащую внутри меньшей из них, проведите луч, так чтобы длина его отрезка, заключенного между окружностями, была а) наименьшей; б) наибольшей.

403. В произвольном выпуклом четырехугольнике найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин была бы наименьшей.

404. Через точку, лежащую внутри данного угла, проведите

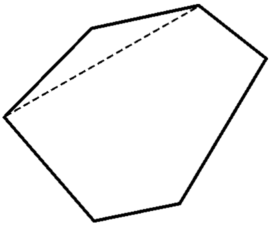

Рис. 14

прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

405. В данный прямоугольник поместите ромб наибольшей площади.

406. Докажите, что в любом выпуклом шестиугольнике найдется диагональ, которая отрезает от него треугольник площади не большей, чем одна шестая площади шестиугольника (рис.14).

Задачи на вычисление

407. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1:3. Вычислите углы треугольника.

408. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) угол ABC равен 80°. Внутри треугольника взята точка O так, что угол OAC равен 10°, а угол OCA равен 30° (рис.15). Найдите величину угла AOB.

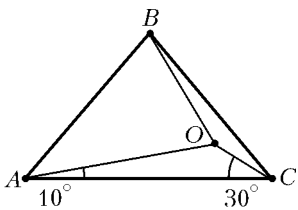

Рис. 15

409. Найдите величину угла C треугольника ABC, если расстояние от вершины C до ортоцентра треугольника равно радиусу описанной окружности.

410. Определите величины углов треугольника, если центры его вписанной и описанной окружностей симметричны относительно основания этого треугольника.

411. Высоты треугольника пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите величину угла треугольника при вершине C.

412. Дан треугольник ABC, у которого угол A вдвое больше угла B, а сторона AB вдвое больше стороны AC. На стороне AB отмечена точка E такая, что $AE = AC$. Найдите длину отрезка CE, если $AC = 1$.

413. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Отношение сторон треугольника, образующих этот угол, равно k. Найдите отношение площадей треугольника и ромба.

414. На каждой из прямых, содержащих стороны треугольника, отло-

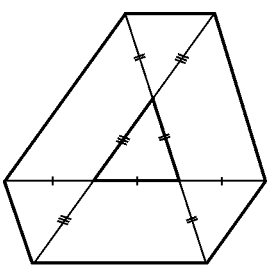

Рис. 16