или решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть одновременно все монеты в каком-либо ящике (любого размера).

а) Докажите, что не более чем за n операций можно уравнять число монет, лежащих орлом вверх, с числом монет, лежащих решкой вверх.

б) За какое наименьшее число операций можно (при произвольном начальном расположении монет) добиться того, чтобы все монеты лежали орлом вверх?

252. В круглой гостиной замка развешаны портреты всех его прежних владельцев. Слуге разрешается менять местами любые два соседних портрета, кроме портретов отца и сына. Докажите, что он может перевесить портреты в произвольном заданном порядке (расположения портретов, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми).

253°. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 1965. Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них модуль их разности. Докажите, что нельзя добиться того, чтобы на доске остался ноль.

254. В n стаканах достаточно большой вместимости налито поровну воды ($n > 1$). Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько в нем уже имеется. При каких n можно за некоторое число таких переливаний слить всю воду в один стакан?

255*. По окружности написаны в произвольном порядке несколько плюсов и минусов – всего n штук. Затем в промежутках между одинаковыми знаками пишутся плюсы, между разными – минусы, а первоначальные знаки стираются; с новым набором проделывается то же самое и т.д.

а) Докажите, что если $n = 2^k$ (k – натуральное число), то из произвольного набора плюсов и минусов в конце концов получится набор из одних плюсов.

б) Докажите, что если n нечетно и есть хотя бы один плюс и хотя бы один минус, никогда не получится набор из одних плюсов.

в) Выясните, из каких первоначальных наборов в конце концов получится набор из одних плюсов, если n не является степенью двойки.

256.** Дано 2^n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}$. Составляется ряд модулей попарных разностей

$$|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \ldots, |a_{2^n-1} - a_{2^n}|, |a_{2^n} - a_1|.$$

С полученными числами проделывается то же самое и т.д.

Докажите, что через несколько шагов получится ряд, составленный из одних нулей.

Бесконечные множества

257. Докажите, что в любой возрастающей бесконечной арифметической прогрессии найдется член, десятичная запись которого начинается с цифры 1.

258. Разбейте множество натуральных чисел на два подмножества, так чтобы ни одно из них не содержало бесконечную арифметическую прогрессию.

259*. Все наборы (любой конечной длины) из цифр 0 и 1 каким-то образом разбиты на два класса. Докажите, что любую бесконечную последовательность цифр 0 и 1 можно разрезать на такие куски, что все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежат одному классу.

260*. Докажите, что из 11 любых бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе разрядов.

Графы, комбинаторика

261. а°) Докажите, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых между собой, либо трое попарно не знакомых.

б) 17 математиков из разных стран переписываются друг с другом. Каждые два переписываются на одном из трех языков: английском, французском или русском. Докажите, что найдутся три математика, которые переписываются на одном и том же языке.

262. Среди девяти мушкетеров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Докажите, что если среди них нет трех, которые должны драться друг с другом, то среди мушкетеров найдутся четверо друзей.

263*. В шахматном турнире участвуют 11 человек. В настоящее время среди любых трех двое еще не сыграли друг с другом. Докажите, что сыграно не более 30 партий.

264*. В некоторой стране между любыми городами имеется непосредственное железнодорожное сообщение только в одном направлении (т.е. для любых двух городов X и Y имеет место одно из двух: или можно проехать из X в Y, или из Y в X). Из каждого города можно выехать в какой-нибудь другой. Назовем город «легко доступным», если из любого другого города можно попасть в него либо непосредственно, либо через один промежуточный город. Докажите, что существуют не менее трех легко доступных городов.

265. При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $n-1$ врагов. Докажите, что Мерлин – советник короля Артура – может рассадить рыцарей за круглым столом, так что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

266. В народной дружине 100 человек, и каждый вечер на дежурство выходят трое. Докажите, что нельзя составить график дежурств так, чтобы любые два человека дежурили вместе ровно один раз.

267. Составьте отряду дружинников такое расписание дежурств на неделю, чтобы каждый день на дежурство выходили трое и каждые двое дежурили вместе ровно один раз. Сколько человек должно быть в таком отряде? Сколько раз должен дежурить каждый из них? (Сравните эту задачу с задачей 87.)

268. Некая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседании присутствовало 10 человек, причем никакие двое из членов комиссии не встречались на ее заседаниях более одного раза. Докажите, что число членов комиссии больше 60.

Турниры

269. В турнире участвуют 10 шахматистов, причем каждые двое участников встречаются по одному разу. Могут ли какие-нибудь три шахматиста набрать на четыре очка больше, чем остальные семеро?

270. Пять пенсионеров решили провести турнир в домино, так чтобы каждые двое из них были один раз партнерами и два раза – противниками (каждую партию играют двое на двое). Сколько партий они должны сыграть? Сколько существует различных расписаний такого турнира (составить расписание – значит указать, какие пары из пяти пенсионеров *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* должны играть между собой)?

271. Шесть шахматистов *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* и *Е* сыграли в турнире по одной партии. Шахматист *А* проиграл только победителю и занявшему последнее место, *Б* выиграл три партии, *В* сыграл все партии вничью, *Г* опередил *Д* на полтора очка, *Е* выиграл у *Д* и сыграл вничью с победителем турнира. Кто сколько очков набрал?

272. В футбольном турнире участвовали пять команд, которые мы будем обозначать по номерам занятых ими мест: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Определите, как закончилась каждая игра, если известно, что каждые две команды встречались один раз, причем команда A_1 ни разу не сыграла вничью, A_2 не проиграла ни одного матча, A_4 не выиграла ни одного матча (за победу команда получала 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков).

Принцип Дирихле

273°. В розыгрыше первенства по футболу в Австралии каждые две команды встречаются один раз. Докажите, что в любой момент состязаний найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

274°. Докажите, что из $n + 1$ целых чисел можно выбрать два, разность которых делится на n.

275. Докажите, что для каждого натурального числа n существует число вида

$$11\ldots1100\ldots00$$

(с некоторым числом нулей и с некоторым числом единиц), делящееся на n.

276. Докажите, что из $n + 1$ чисел, меньших $2n$, всегда можно выбрать два, отношение которых – степень двойки.

277. а) Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из первых 100 натуральных чисел так, чтобы ни одно из них не было в 2 раза больше другого?

б) Сколькими способами это можно сделать?

278. а) Докажите, что из $n +1$ чисел, меньших $2n$, всегда можно выбрать три числа, из которых одно равно сумме двух других.

б) Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < n$. Докажите, что если $k > \dfrac{n+1}{2}$, то среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можно найти три, одно из которых равно сумме двух других.

279. Числа от 1 до $2n$ выписаны в ряд в произвольном порядке и под каждым числом написан его номер в этом ряду. Затем каждое число складывается со своим номером. Докажите, что среди этих сумм найдутся две, разность которых делится на $2n$.

280*. Имеется неограниченное число белых и черных кубиков. Нужно построить из них (снизу вверх) сплошную башню конечной высоты в форме прямоугольного параллелепипеда, так чтобы каждый черный кубик в башне граничил с четным числом белых, а каждый белый – с нечетным числом черных. Докажите, что при любом заданном нижнем слое такую башню построить можно.

281*. 2^n натуральных чисел выписаны в ряд. Известно, что если выписать все простые множители всех этих чисел, то среди них будет не более n различных. Докажите, что из данного ряда можно выбрать несколько стоящих подряд чисел, так что их произведение будет точным квадратом.

282*. Даны 20 различных положительных целых чисел, таких что самое большое из них не превосходит 70. Докажите, что среди всевозможных попарных разностей этих чисел имеется по крайней мере четыре равных.

Количество информации

283. Заданы несколько натуральных чисел, из которых ни одно не является началом другого. Пусть K_n – количество заданных чисел с n цифрами. Докажите, что

$$\frac{K_1}{10^1}+\frac{K_2}{10^2}+\ldots+\frac{K_n}{10^n}+\ldots\le\frac{9}{10}.$$

(Мы говорим, что натуральное число a является началом числа b, если $a=b$ или если к a можно дописать справа несколько цифр так, что получится b.)

284*. В марсианском алфавите всего две буквы: А и Б. Каждые два слова одинаковой длины отличаются по крайней мере в трех местах. Докажите, что слов длины n не более чем $\frac{2^n}{n+1}$.

285. В выражении $x_1:x_2:\ldots:x_n$ для указания порядка, в котором нужно выполнять деление, расставляются скобки и результат записывается в виде такой дроби:

$$\frac{x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}}{x_{j_1}\cdot x_{j_2}\cdot\ldots\cdot x_{j_{n-k}}}$$

(каждое из чисел $x_1,\ldots,x_n$ стоит или в числителе, или в знаменателе этой дроби). Сколько различных дробей такого вида можно получить из данного выражения, по-разному расставляя в нем скобки?

286°. В алфавите некоторого африканского языка n букв. Чтобы передавать телеграммы на этом языке, нужно составить «азбуку Морзе», т.е. каждой букве поставить в соответствие некоторую последовательность точек и тире. Докажите, что обязательно найдется такая буква, для которой соответствующая последовательность точек и тире состоит не менее чем из $\log_2 n-1$ знаков.

287°. а) Известно, что среди 80 монет есть одна фальшивая – более легкая, чем остальные. Каким наименьшим числом взвешиваний на рычажных весах без гирь можно выделить фальшивую монету? б) Та же задача – для n монет.

288. Имеется пять грузиков разной массы и рычажные весы без гирь. Расположите грузики по возрастанию массы, выполнив семь взвешиваний.

289*. Из набора гирь массами 1, 2, 3, ..., 26 г выделите шесть гирь, так чтобы из них нельзя было выбрать два набора одинаковой массы. Докажите, что нельзя выбрать семь гирь, обладающих тем же свойством.

290*. Из 19 шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Докажите, что за восемь проверок всегда можно выделить оба радиоактивных шара.

291*. Из 11 шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Докажите, что менее чем за семь проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров.

292. Имеется 10 мешков монет. В девяти мешках монеты настоящие (массой 10 г), а в одном мешке – фальшивые (массой 11 г). Одним взвешиванием на весах со стрелкой, указывающей разность масс, находящихся на правой и на левой чашках, определите, в каком мешке фальшивые монеты.

293. Имеется 11 мешков, в каждом из которых находится достаточно большое количество монет, и весы со стрелкой, указывающей разность масс, находящихся на правой и на левой чашках. Каково наименьшее число взвешиваний, за которое можно выделить мешок с фальшивыми монетами? Известно только, что фальшивые монеты отличаются по весу от настоящих.

Таблицы

294. В каждую клетку таблицы 10×10 требуется вписать одно из чисел 1 или – 1, так чтобы произведение всех чисел в каждой строке и в каждом столбце было равно 1. Сколькими способами можно заполнить таблицу?

295. В клетки таблицы 10×10 требуется вписать натуральные числа от 1 до 100, так чтобы числа в каждой строке и в каждом столбце образовывали арифметическую прогрессию.

Сколькими способами это можно сделать?

296. Заполните клетки таблицы 4×4, так чтобы числа в каждом столбце и в каждой строке образовывали геометрическую прогрессию (рис.2).

9			
			4
		16	
	18		

Рис.2

297. В клетки квадратной таблицы $n \times n$ записаны числа, причем известно, что сумма $2n - 1$ чисел, составляющих произвольный крест (т.е. заполняющих некоторую строку и некоторый столбец) равна 0. Докажите, что все числа в таблице равны 0.

298*. На клетчатой доске 11×11 отмечены 22 клетки, так что на каждой горизонтали отмечены ровно две клетки. Два расположения клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

299*. В каждой клетке квадратной таблицы $n \times n$ стоит целое неотрицательное число. При этом, если на пересечении столбца и строки стоит 0, то сумма чисел в этом столбце и в этой строке вместе не меньше n. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не меньше $\frac{n^2}{2}$.

300. Все стороны правильного треугольника разбиты на n равных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Затем в каждой из получившихся маленьких треугольников записывают одно из чисел 1 или -1, так чтобы произведение числа в каждом треугольнике на все числа в треугольниках, имеющих с ним общую сторону, равнялось 1.

а) Докажите, что в углах треугольника должны стоять равные числа.

б) Сколькими разными способами можно заполнить таким образом нашу треугольную таблицу?

Игры

301. Имеется доска 3×3 и девять карточек размером в одну клетку, на которых написаны какие-то числа. Двое играющих поочередно кладут по одной карточке на клетки доски. После того как все карточки разложены, первый (начинающий) подсчитывает сумму шести чисел, стоящих в верхней и нижней строках, второй подсчитывает сумму в ле-

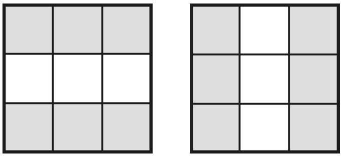

Рис.3

вом и правом столбцах (рис.3). Выигрывает тот, у кого сумма больше. Докажите, что при правильной игре первого игрока второй не сможет выиграть, независимо от того, какие числа написаны на карточках.

302°. Двое играют в такую игру: первый называет произвольное число от 1 до 10, второй прибавляет к нему одно из чисел от 1 до 10 и называет сумму, затем первый снова прибавляет к этой сумме одно из чисел от 1 до 10 и называет новую сумму и т. д. Выигрывает тот, кто первым назовет 100. Докажите, что в этой игре начинающий может обеспечить себе выигрыш.

303. Имеется две кучки по n спичек. Два игрока поочередно берут любое количество спичек из одной из кучек, не обязательно всякий раз из одной и той же. Запрещается оставлять в обеих кучках равное число спичек, за исключением того случая, когда в одной кучке спичек уже нет. Выигрывает тот, кто заберет весь остаток. Как надо играть, чтобы выиграть?

304. Двое играют в такую игру: из кучки, где имеется 25 спичек, берут по очереди одну, две или три спички. Выигрывает тот, у кого в конце будет четное число спичек. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его противник?

305.** На доске написаны двадцать чисел: 1, 2, 3, …, 19, 20. Двое играющих по очереди ставят перед этими числами знаки + или –. (Знак можно ставить перед любым еще не использованным числом.) Первый стремится к тому, чтобы полученная после расстановки всех двадцати знаков сумма была как можно меньше по модулю. Какую наибольшую по модулю сумму может обеспечить себе второй?

Карточки с числами

306*. Даны двадцать карточек, на каждой из которых написана одна цифра 0, 1, 2, …, 9, причем каждая цифра написана на двух карточках. Можно ли расположить эти карточки в ряд так, чтобы нули стояли рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, между двойками – две, и так далее до девяток, между которыми должно лежать девять карточек (рис.4)?

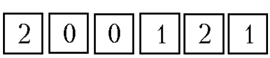

Рис.4

307. а) По кругу выписаны p плюсов и q минусов, a – число пар рядом стоящих плюсов, b – число пар рядом стоящих минусов. Докажите, что $p - q = a - b$.

б) Каждое из чисел $x_1, x_2, \cdots, x_m$ равно либо +1, либо −1. Известно, что $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{m-1}x_m + x_mx_1 = 0$. Докажите, что m делится на 4.

308. Найдите все десятизначные числа, у которых первая цифра равна количеству нулей в числе, вторая – количеству единиц, и т.д., десятая – количеству девяток.

309. a – число большее 2. Некто пишет на карточках числа $a, a^2, a^3, \ldots, a^n$ (каждое число на одной карточке). Потом часть карточек он кладет себе в правый карман, часть – в левый, а остальные выбрасывает. Докажите, что сумма чисел в правом кармане не может быть равна сумме чисел в левом.

310. В автобусе без кондуктора ехали $4n$ пассажиров, у которых были только монеты в 10, 15 и 20 копеек. Известно, что каждый пассажир, тем не менее, смог заплатить за проезд и получить сдачу. Докажите, что наименьшее общее число монет, которое могло быть у всех пассажиров, равно $5n$. (Стоимость проезда в автобусе – 5 коп.)

Несколько теорем

311. Дано 50 различных положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$. Как их надо занумеровать, чтобы величина $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{50} - a_1|$ была наибольшей?

312*. На кольцевой автомобильной дороге стоят n одинаковых автомашин. Общее количество бензина у всех этих машин достаточно для того, чтобы одна из них смогла проехать по всей кольцевой дороге. Докажите, что хотя бы одна из этих автомашин может, забирая по пути бензин у остальных автомашин, проехать по всей кольцевой дороге.

313*. $n^2 + 1$ различных чисел выписаны в ряд. Докажите, что можно выбрать $n + 1$ из этих чисел, так что они будут расположены в порядке возрастания или в порядке убывания.

314*. В школе работают несколько кружков. Известно, что для любых k кружков (k = 1, 2, …) количество ребят, которые пришли бы на совместное занятие этих кружков, не меньше k. Докажите, что можно выбрать в каждом кружке старосту, так чтобы никто не был старостой сразу двух кружков.

315. Площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки, нарисованного на клетчатой бумаге, равна $j + \frac{r}{2} - 1$, где j –

число узлов, лежащих на его сторонах и в вершинах (узлами сетки мы называем точки, где пересекаются линии сетки; сторона клетки принята за 1).

Докажите эту формулу:

а) для прямоугольника $m \times n$ клеток, у которого стороны идут по линиям сетки;

б) для прямоугольной трапеции, у которой основания и одна боковая сторона идут по линиям сетки;

в) для произвольного выпуклого многоугольника.

Задачи на клетчатой бумаге

316. Прямоугольник со сторонами m и n нарисован на клетчатой бумаге, так что его стороны проходят по линиям сетки. Сколько клеток пересекает диагональ этого прямоугольника?

317*. Докажите, что шахматный конь не может обойти доску $4 \times n$, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходную клетку (n – любое натуральное число).

318. Докажите, что каждое целое неотрицательное число можно и притом единственным образом представить в виде

$$\frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2},$$

где x и y – целые неотрицательные числа.

319. В городе 10 улиц параллельны и 10 других пересекают их под прямым углом. Какое наименьшее число поворотов может иметь замкнутый маршрут, проходящий через все перекрестки?

320. Какое наибольшее число веревочек, соединяющих соседние узлы волейбольной сетки $m \times n$ с квадратными ячейками, можно разорвать так, чтобы сетка не распалась на куски?

321*. На клетчатой бумаге начерчена замкнутая ломаная линия, все звенья которой равны и все вершины которой лежат в узлах клетчатой бумаги. Докажите, что число звеньев такой ломаной обязательно четно.

322*. На плоскости нарисована сетка, образованная из правильных шестиугольников со стороной 1 (соты). Жук прополз, двигаясь по линиям сетки, из узла A в узел B по кратчайшему пути, длина которого равна 100 (рис.5). Докажите, что половину пути он полз в одном направлении.

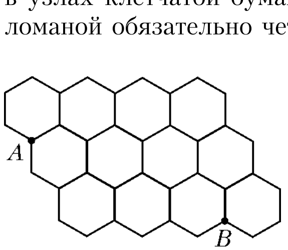

Рис.5